Paulius Kantautas
Lukas Melninkas
Pijus Simonaitis
Paulius Šarka

Matematikos knyga

TURINYS

Apie knygą 1

1 Skaičių teorija **2**
- 1.1 Dalumas 2
- 1.2 Lyginiai 10
- 1.3 Oilerio teorema 14
- 1.4 Kinų liekanų teorema 19
- 1.5 Liekanų grupė 22
- 1.6 Kvadratinės liekanos 28
- 1.7 Diofantinės lygtys 35
  - 1.7.1 Dvi lygties pusės 35

2 Algebra **42**
- 2.1 Nelygybės 42
  - 2.1.1 Pirmieji žingsniai 45
  - 2.1.2 Vidurkių nelygybės 50
  - 2.1.3 Cauchy-Schwarz nelygybė 61
  - 2.1.4 Specialios technikos 66
  - 2.1.5 Drakonų puota 74
- 2.2 Funkcinės lygtys 76
  - 2.2.1 Įsistatykime $x = 0$ 76
  - 2.2.2 Funkcijų tipai 81
  - 2.2.3 Cauchy funkcinė lygtis 88

3 Kombinatorika **92**
- 3.1 Matematiniai žaidimai 92

4 Sprendimai **102**

Literatūra **153**

Apie knygą

Matematikos knyga - tai knyga skirta matematika besidomintiems moksleiviams ir moksleivėms. Jos turinys yra gerokai nutolęs nuo sutinkamo mokykloje ir, pagal matematikos olimpiadų tradiciją, orientuotas į keturias matematikos sritis: skaičių teoriją, algebrą, kombinatoriką ir geometriją (pastarosios kol kas visai nėra). Turinys pateiktas naudojant įprastą matematinę kalbą, tad prie teoremų, įrodymų ir matematinių pažymėjimų nepratusiems gali prireikti šiek tiek daugiau atkaklumo ir mokytojo(-os) pagalbos.

Prie knygos atsiradimo prisidėjo keletas žmonių, kuriuos norėtume paminėti:

Žymantas Darbėnas - vienas iš pirmųjų idėjos autorių, drąsiai sakęs, kad knygą parašyti įmanoma, ir pradėjęs rašyti pirmuosius tekstus.

Albertas Zinevičius - vieno iš autorių dėka susidūręs su absoliučiai visomis iškilusiomis knygos rašymo ir apipavidalinimo problemomis ir padėjęs jas išspręsti.

Gabrielė Bakšytė - fantastiškai iš niekur nieko atsiradusi ir mus išgelbėjusi teksto redaktorė.

Taip pat norėtume paminėti Nacionalinę Moksleivių Akademiją, kuri iki šiol visuomet buvo šalia ir kantriai palaikė ilgo ir banguoto proceso metu. Idėjai užgimus Paulius ir Žymantas buvo jos dėstytojai, o vėliau prisijungę Paulius, Pijus, Lukas ir Gabrielė - jos moksleiviai.

Ačiū jums!

*

Kaip jau pastebėjote iš pirmųjų puslapių, ši knyga yra išleista pagal *Creative Commons* licenziją. Tai reiškia, kad kartu su knyga jūs gaunate gerokai daugiau laisvės, nei įprastai, ir mes tikimės, kad ta laisve jūs drąsiai naudositės.

Kartu tai šiek tiek paaiškina, kodėl išleidžiama nebaigta knyga. Rašyti po skyrių ar skyrelį yra daug paprasčiau ir efektyviau, nei iš karto griebtis sunkiai įkandamo užmojo. Atviras formatas neriboja nei autorių skaičiaus, nei rašymo trukmės, tad jei žvilgtelėjus į turinį jums galvoje rikiuojasi trūkstamo skyrelio tekstas, galbūt metas sėsti prie klaviatūros?

1 **SKYRIUS**

SKAIČIŲ TEORIJA

Skaičių teorija yra senas tradicijas turinti matematikos šaka, nagrinėjanti uždavinius, susijusius su skaičiais ir jų dalumu. Šiame skyriuje supažindinsime su pačiomis pagrindinėmis sąvokomis ir panagrinėsime dalelę klasikinės teorijos - liekanų grupes ir kvadratinius simbolius.

1.1 Dalumas

Su skaičių dalumo savoka jau greičiausiai esate pažįstami, tad pradžioje keletas apibrėžimų pasitikslinimui. Turėkite omenyje, kad visur bus kalbama apie natūraliuosius arba sveikuosius skaičius.

Apibrėžimas. Skaičius n *dalijasi* iš skaičiaus a, jei egzistuoja toks skaičius b, kad $n = a \cdot b$. Skaičius a *dalo* n (žymėsime $a|n$) jei n dalijasi iš a.

Apibrėžimas. Skaičius, iš kurio dalijasi n, vadinamas n *dalikliu.* Skaičius, kuris dalijasi iš n, vadinamas n *kartotiniu.*

Apibrėžimas. Skaičius, kuris dalijasi tik iš vieneto ir iš savęs, vadinamas *pirminiu.*

Sveikųjų skaičių dalyba tenkina keletą savybių. Įsitikinkite, kad suprantate kiekvieną, ir mintyse pabandykite sugalvoti po pavyzdį:

- Jei $x|a$ ir $x|b$, tai $x|a + b$, $x|a - b$ ir $x|ab$;
- Jei $x|y$ ir $y|z$, tai $x|z$;
- Jei $x|a$ ir $y|b$, tai $xy|ab$.

Skaidymas dauginamaisiais

Viena iš pagrindinių sveikųjų skaičių savybių, susijusių su dalumu, yra vienareikšmis skaidymasis dauginamaisiais. Ja mes remsimės ir naudosimės labai dažnai, nors jos ir neįrodysime (įrodymas yra kiek ilgokas ir vargu, ar tinkamas pačiai pažinties su skaičių teorija pradžiai).

Teiginys. *Kiekvieną skaičių n galima vieninteliu būdu išskaidyti pirminiais dauginamaisiais:*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Mažus skaičius skaidyti pirminiais dauginamaisiais nesunku - tiesiog iš eilės tikriname pirminius skaičius ir skaičiuojame, kiek kartų iš jų galima padalinti. Pavyzdžiui,

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Žinodami, kaip skaičius išsiskaido, galime nemažai apie jį pasakyti. Pavyzdžiui, galime nurodyti jo daliklius:

Teiginys. *Jei skaičius n dalijasi iš skaičiaus a ir*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

tai tuomet

$$a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

ir

$$\beta_i \leqslant \alpha_i$$

su visais $i = 1, \ldots, k$.

Įrodymas. Jei n dalijasi iš a, tai tuomet egzistuoja toks b, kad $n = ab$. Išskaidę a dauginamaisiais gauname, kad į n skaidinį turi įeiti visi pirminiai kaip ir į a su nemažesniais laipsnių rodikliais. □

Panagrinėkime skaičių 12. Jis išsiskaido kaip $2^2 \cdot 3^1$. Pagal ką tik įrodytą teiginį jo dalikliais turėtų būti $2^2 \cdot 3^1$,$2^1 \cdot 3^1$, $2^0 \cdot 3^1$, $2^2 \cdot 3^0$, $2^1 \cdot 3^0$ ir $2^0 \cdot 3^0$. Sudauginę matome, kad gavome skaičius 12, 6, 3, 4, 2 ir 1, kurie iš ties yra visi 12 dalikliai. Tad norėdami rasti duoto skaičiaus daliklį turime paimti kažkokią dalį jo skaidinio. Šis pastebėjimas leidžia nesunkiai suskaičiuoti, kiek iš viso daliklių skaičius turi:

Teiginys. *Skaičius $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ turi $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$ daliklių.*

Įrodymas. Kiekvienas n daliklis bus užrašomas kaip $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, kur $\beta_i \leqslant \alpha_i$ su visais $i = 1, \ldots, k$. Skirtingus daliklius gausime imdami skirtingus pirminių skaičių laipsnius. Parinkti β_1 galime $\alpha_1 + 1$ būdais (nepamirškime nulio!), parinkti β_2 galime $\alpha_2 + 1$ būdais ir taip toliau. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę iš viso galėsime sudaryti $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$ skirtingų laipsnių rinkinių, todėl tiek bus ir skirtingų daliklių. □

Didžiausiasis bendras daliklis

Prisiminkime didžiausiojo bendro daliklio ir mažiausiojo bendro kartotinio sąvokas.

Apibrėžimas. Dviejų ar daugiau skaičių *didžiausiuoju bendru dalikliu* (dbd) vadinsime didžiausią skaičių, iš kurio visi duotieji dalinasi.

Apibrėžimas. Dviejų ar daugiau skaičių *mažiausiuoju bendru kartotiniu* (mbk) vadinsime mažiausią skaičių, kuris dalijasi iš visų duotųjų.

Apibrėžimas. Du skaičius, kurių didžiausiasis bendras daliklis yra lygus 1, vadinsime *tarpusavyje pirminiais.*

Pavyzdžiui, didžiausias skaičius, iš kurio dalijasi ir 15 ir 25, yra 5, o mažiausias skaičius, kuris dalijasi iš 2, 3, 4, 5 ir 6, yra 60. Tad $\text{dbd}(15, 25) = 5$ ir $\text{mbk}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$. Ieškant didžiausiojo bendro daliklio ir mažiausiojo bendro kartotinio labai praverčia skaidymas dauginamaisiais. Įsižiūrėkite:

Norėdami rasti didžiausią skaičių $2^4 \cdot 3^1$ ir $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ bendrą daliklį turime paimti didžiausią įmanomą skaidinio dalį, priklausančią abiems skaičiams. Šiuo atveju tai būtų $2^1 \cdot 3^1$.

Norėdami rasti mažiausią skaičių $2^4 \cdot 3^1$ ir $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ bendrą kartotinį, turime paimti mažiausią įmanomą skaidinį, į kurį "tilptų" abiejų skaičių skaidiniai. Šiuo atveju tai būtų $2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Kitas būdas, ar bent jau pagrindinė idėja, kuri praverčia ieškant didžiausio bendro daliklio, yra Euklido algoritmas. Jis remiasi svarbia ir naudinga lygybe:

Teiginys.

$$\text{dbd}(a, b) = \text{dbd}(a - b, b).$$

Įrodymas. Tegu $\text{dbd}(a, b) = d$. Tuomet $d|a$ ir $d|b$, o kartu $d|(a - b)$. Vadinasi, $\text{dbd}(a - b, b)$ bus nemažesnis nei d.

Iš kitos pusės - tegu $\text{dbd}(a - b, b) = d'$. Kartut $d'|(a - b)$ ir $d'|b$, o tuo pačiu $d'|a$, nes $a = (a - b) + b$. Vadinasi, $\text{dbd}(a, b)$ bus nemažesnis nei d'.

Kadangi gavome $d \geqslant d'$ ir $d' \geqslant d$, tai vadinasi $d = d'$, t.y. $\text{dbd}(a, b) = \text{dbd}(a - b, b)$. □

Pavyzdys. *Pasinaudodami įrodyta lygybe raskime* $\text{dbd}(14, 6)$, $\text{dbd}(2^{100} + 1, 2^{100} - 1)$ *ir* $\text{dbd}((p + q)^2, p)$, *kur* p *ir* q *pirminiai skaičiai.*

Sprendimas. Didžiausio bendro daliklio ieškosime atimdami iš didesnio skaičiaus mažesnį:

$$\text{dbd}(14, 6) = \text{dbd}(8, 6) = \text{dbd}(2, 6) = \text{dbd}(2, 4) = \text{dbd}(2, 2) = 2.$$

$$\text{dbd}(2^{100} + 1, 2^{100} - 1) = \text{dbd}(2, 2^{100} - 1) = 1.$$

$$\text{dbd}((p + q)^2, p) = \text{dbd}(p(p + 2q) + q^2, p) = \text{dbd}(q^2, p) = 1.$$

△

Euklido algoritmas. *Rasime* $\mathrm{dbd}(a, b)$. *Nemažindami bendrumo tarkime, kad* $a > b$. *Tuomet* a *užrašomas kaip*
$a = bq + r$, *kur dalybos liekana tenkina* $0 < r < b$. *Analogiškai*
$b = rq_1 + r_1$, *kur* $0 < r_1 < r$,
$r = r_1 q_2 + r_2$, *kur* $0 < r_2 < r_1$,
$\ldots$
$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$, *kur* $0 < r_k < r_{k-1}$,
$r_{k-1} = r_k q_{k+1}$.

Iš $r > r_1 > \ldots > r_k$ *seka, kad kažkada gausime dalybos liekaną lygią* 0. *Tuomet, kadangi*

$$\mathrm{dbd}(a, b) = \mathrm{dbd}(b, r) = \cdots = \mathrm{dbd}(r_{k-2}, r_{k-1}) = \mathrm{dbd}(r_{k-1}, r_k),$$

tai paskutinioji nenulinė liekana r_k *ir bus didžiausias bendrasis daliklis.*

Paties Euklido algoritmo taip skrupulingai, kaip jis suformuluotas, netaikysime - dažniausiai, kaip pavyzdyje, pakaks porą kartų pasinaudoti lygybe $\mathrm{dbd}(a, b) = \mathrm{dbd}(a, b - a)$. Tačiau užrašėme jį ne be reikalo - labai svarbi bus jo išvada:

Išvada. *Jei* $\mathrm{dbd}(a, b) = d$, *tai egzistuoja tokie* $x, y \in \mathbb{Z}$, *kad* $ax + by = d$.

Įrodymas. Iš priešpaskutinės Euklido algoritmo lygybės galime išreikšti r_k per r_{k-1} ir r_{k-2}. Iš dar ankstesnės galima išreikšti r_{k-1} per r_{k-2} ir r_{k-3}. Įstatę į pirmąją išraišką gausime r_k išraišką per r_{k-2} ir r_{k-3}. Taip toliau vis tęsdami gausime r_k išraišką per a, b, t.y. rasime x, y, tenkinančius $ax + by = \mathrm{dbd}(a, b)$. □

Pirminiai skaičiai

Jau pirmuosiuose puslapiuose galima atkreiptį dėmesį į tai, kokį didelį vaidmenį skaičių teorijoje vaidina pirminiai skaičiai. Kadangi kiekvieną sveikąjį skaičių vieninteliu būdu galima užrašyti kaip jų sandaugą, tai neretai jie yra vaizdžiai vadinami sveikųjų skaičių atomais. Įrodykime vieną iš gražiausių ir elegantiškiausių matematikos teoremų:

Teorema. *Pirminių skaičių yra be galo daug.*

Įrodymas. Tarkime priešingai, kad pirminių skaičių yra baigtinis skaičius. Sudauginkime juos visus ir pridėkime vienetą: $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Šis skaičius nesidalija iš nė vieno pirminio $p_1, \ldots, p_n$, todėl pats yra pirminis. Gavome naują pirminį - prieštara. □

Kartais tenka patikrinti, ar duotas skaičius yra pirminis, ar ne. Tam reikia patikrinti visus potencialius jo daliklius. Truputį pagalvoję, galime rasti sutrumpinimą:

Teiginys. *Jei skaičius* n *nesidalija iš jokio pirminio skaičiaus, mažesnio (arba lygaus) už* $\sqrt{n}$, *tai jis pirminis.*

Įrodymas. Išties, jei skaičius n turi daliklį a, tai turi ir daliklį $\frac{n}{a}$, bet tuomet arba $a \leqslant \sqrt{n}$, arba $\frac{a}{n} \leqslant \sqrt{n}$, vadinas,i n turės daliklį (o kartu ir pirminį daliklį), mažesnį už $\sqrt{n}$. □

Pavyzdžiui, norint patikrinti, ar 101 yra pirminis, užtenka išbandyti 2, 3, 5 ir 7. Kadangi nė iš vieno nesidalija, tai 101 yra pirminis.

Dalumo požymiai

Užrašę skaičių dešimtainėje sistemoje $\overline{a_1a_2\dots a_n}$, iš jo skaitmenų galime spręsti, ar jis dalijasi iš kai kurių mažų skaičių, ar ne. Naudingiausi dalumo požymiai yra šie:

- Skaičius $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ dalijasi iš 2, jei iš 2 dalijasi jo paskutinis skaitmuo a_n.
- Skaičius $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ dalijasi iš 3, jei iš 3 dalijasi jo skaitmenų suma $a_1 + \dots + a_n$.
- Skaičius $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ dalijasi iš 4, jei iš 4 dalijasi jo dviejų skaitmenų galūnė $\overline{a_{n-1}a_n}$.
- Skaičius $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ dalijasi iš 5, jei iš 5 dalijasi jo paskutinis skaitmuo a_n.
- Skaičius $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ dalijasi iš 8, jei iš 8 dalijasi jo trijų skaitmenų galūnė $\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$.
- Skaičius $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ dalijasi iš 9, jei iš 9 dalijasi jo skaitmenų suma $a_1 + \dots + a_n$.
- Skaičius $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ dalijasi iš 11, jei iš 11 dalijasi jo alternuojanti skaitmenų suma $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_n$.

Visų dalumo požymių įrodymai bus išmėtyti po pirmus du skyrelius, o kol kas svarbiau juos įsiminti ir išmokti atpažinti.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. *Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n, $n^2 + n$ dalijasi iš 2.*

Sprendimas. Jei n dalijasi iš 2, tai ir n^2 dalijasi iš dviejų. Dviejų skaičių, besidalijančių iš dviejų (lyginių), suma taip pat dalinsis iš dviejų.

Jei n nesidalija iš 2, tai ir n^2 nesidalija iš dviejų. Dviejų skaičių, nesidalijančių iš dviejų (nelyginių) suma dalijasi iš dviejų.

Vadinasi, tikrai, bet kuriuo atveju, $n^2 + n$ dalinsis iš dviejų. △

Pavyzdys 2. *Įrodykite, kad jei $n|5a + 3b$ ir $n|3a + 2b$, tai $n|a$ ir $n|b$.*

Sprendimas. Pastebėkime, kad a galime išreikšti kaip $2(5a + 3b) - 3(3a + 2b)$, o b kaip $5(3a + 2b) - 3(5a + 3b)$. Abu skirtumai iš n dalijasi, todėl dalinsis ir a, ir b. △

Pavyzdys 3. *Įrašykite žvaigždučių vietoje tokius skaitmenis, kad skaičius $15{*}{*}15$ dalytųsi iš 99.*

Sprendimas. Duotas skaičius dalinsis iš 99 tada ir tik tada, kai dalinsis iš 9 ir iš 11. Jei vietoje žvaigždučių įrašysime x ir y, tai pagal dalumo požymius gausime, kad $12+x+y$ turi dalintis iš 9, ir $x - y - 8$ turi dalintis iš 11. Abi sąlygas tenkina $x = 6$, $y = 9$. △

Pastaba. Teiginys, kad n dalinasi iš ab tada ir tik tada, kai n dalinasi iš a ir n dalinasi iš b, yra teisingas, tik kai a ir b yra tarpusavyje pirminiai.

Pavyzdys 4. *Įrodykite dalumo iš 3 požymį.*

Sprendimas. Skaičius, užrašytas dešimtaine išraiška kaip $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, yra lygus $a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. Pastebėkime, kad visi dešimties laipsniai yra vienetu didesni už skaičių, besidalijantį iš trijų:

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n =$$
$$a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} + a_2 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 9 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Matome, kad skaičius nuo savo skaitmenų sumos skiriasi per 3 kartotinį, todėl arba abu dalijasi iš trijų, arba abu nesidalija. △

Pavyzdys 5. [IMO 1959] *Įrodykite, kad trupmena $\frac{21n+4}{14n+3}$ yra nesuprastinama su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis.*

Sprendimas. Trupmena bus nesuprastinama, jei didžiausias skaitiklio ir vardiklio bendras daliklis bus lygus vienam. Pasinaudoję $\mathrm{dbd}(a, b) = \mathrm{dbd}(a, b - a)$ gauname:

$$\mathrm{dbd}(21n + 4, 14n + 3) = \mathrm{dbd}(7n + 1, 14n + 3) = \mathrm{dbd}(7n + 1, 1) = 1.$$

△

Uždaviniai

1. Duota, kad $n|3a$ ir $n|12a + 5b$. Įrodykite, kad $n|10b$. *S*
2. Duota, kad $n|3a + 7b$ ir $n|2a + 5b$. Įrodykite, kad $n|a$ ir $n|b$. *S*
3. Ar teisingos šios "dalumo savybės": *S*
   a) Jei $x|a + b$, tai $x|a$ ir $x|b$,
   b) Jei $x|a \cdot b$, tai $x|a$ arba $x|b$,
   c) Jei $x|a$ ir $y|a$, tai $xy|a$?
4. Įrodykite, kad bet kaip sudėliojus devynis skaitmenis 1, 2,..., 9, gautas devynženklis skaičius dalinsis iš 9. *S*
5. Įrodykite, kad skaičius $\overline{abba}$ dalijasi iš 11. *S*
6. Įrašykite žvaigždutes vietoje tokį skaitmenį, kad skaičius 12345$*$ dalytųsi iš: a) 9; b) 8; c) 11. *S*
7. Duota, kad skaičius $a + 4b$ dalijasi iš 13. Įrodykite, kad ir $10a + b$ dalijasi iš 13. *S*
8. Raskite visus pirminius skaičius iš intervalo $[180, 200]$. *S*
9. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $n^2 + 5n + 6$ pirminis? *S*
10. Duota, kad $n|a + b$. Įrodykite, kad $n|a^3 + 2a + b^3 + 2b$. *S*
11. Kokius skaičius galime išreikšti suma $8x + 5y$, kur $x, y \in \mathbb{Z}$? *S*

12. Ar skaičius, kurio skaitmenų suma lygi 5, gali dalintis iš 11? *S*

13. Įrodykite, kad skaičius turi nelyginį daliklių skaičių tada ir tik tada, kai jis yra sveikojo skaičiaus kvadratas. *S*

14. Duota, kad trupmena $\frac{a}{b}$ yra suprastinama. Ar trupmena $\frac{a-b}{a+b}$ būtinai yra suprastinama? Ir atvirkščiai, jei žinoma, kad trupmena $\frac{a-b}{a+b}$ yra suprastinama, ar trupmena $\frac{a}{b}$ būtinai yra suprastinama? *S*

15. Įrodykite, kad $\text{mbk}(a, b) \cdot \text{dbd}(a, b) = a \cdot b$. *S*

16. Duota, kad $11|3x + 7y$ ir $11|2x + 5y$. Įrodykite, kad $121|x^2 + 3y^2$. *S*

17. Įrodykite, kad skaičiaus, kuris dalijasi iš 99, skaitmenų suma yra ne mažesnė už 18. *S*

18. Raskite bent vieną n, kad intervale $[n, n+10]$ nebūtų nė vieno pirminio skaičiaus. *S*

19. Duotas 100-ženklis skaičius a, kuris dalijasi iš 9. Žinome, kad b yra a skaitmenų suma, c yra b skaitmenų suma, d yra c skaitmenų suma. Kam lygus skaičius d? *S*

20. Nurodykite kokį nors skaičiaus $n = 27^{28} + 4$ daliklį skirtingą nuo 1 ir paties n. [1] *S*

21. Įrodykite, kad jei p pirminis, tai $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ dalijasi iš p su visais $1 \leqslant k \leqslant p-1$. *S*

22. Kiek yra sveikųjų skaičių $1 \leqslant n \leqslant 100$, kad *S*

    a)$\text{dbd}(n^2 + 1, n + 1) > 1$

    b) $\text{dbd}(n^2 + 1, n + 2) > 1$?

23. [Pan African 2001] Raskite visus sveikuosius n, su kuriais skaičius $\frac{n^3+3}{n^2+7}$ yra sveikasis. *S*

24. Įrodykite, kad $\underbrace{11\cdots1}_{3^n}$ dalijasi iš 3^n. *S*

25. [LitKo 2002] Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra sveikojo skaičiaus kvadratas, trečdalis yra sveikojo skaičiaus kubas, o penktadalis yra sveikojo skaičiaus penktasis laipsnis. *S*

26. Raskite mažiausią sveikąjį skaičių turintį 75 daliklius ir besidalijantį iš 75. *S*

27. Su kuriomis neneigiamomis n reikšmėmis vienu metu $2n+1$ ir $3n+1$ yra pilnieji kvadratai ir $5n + 3$ yra pirminis? *S*

28. Samprotaudami panašiai kaip įrodyme, kad pirminių skaičių yra be galo daug, įrodykite, kad pirminių skaičių pavidalo $4k + 3$ yra be galo daug. *S*

29. Pažymėkime $f(n)$ vienaženklį skaičių, kurį gauname vis daugindami n skaitmenis. Pavyzdžiui $f(27) = f(14) = 4$. Raskite visus n, su kuriais $f(n) = 1$. *S*

30. [Ireland 2007] Raskite visus pirminius skaičius p ir q, tenkinančius $p|q + 6$ ir $q|p + 7$. *S*

[1] Lietuvos 5-6 klasių moksleivių matematikos olimpiada 2005m.

31. [IMO 2002] Tegu $n \geqslant 2$ natūralusis skaičius, kurio dalikliai yra $1 < d_1 < d_2 \cdots < d_k = n$. Įrodykite, kad $d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k$ yra visuomet mažesnis už n^2, ir raskite, kada jis yra n^2 daliklis. S

1.2 Lyginiai

Lyginiaĩ yra nepakeičiamas įrankis sprendžiant uždavinius apie sveikųjų skaičių dalijimąsi ir liekanas.

Apibrėžimas. Jei $m|a-b$, tai sakysime, kad "a lygsta b moduliu m", ir žymėsime

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Pavyzdžiui:

$$2 \equiv 5 \pmod 3, \quad 100 \equiv 0 \pmod{20}, \quad -3 \equiv 2 \pmod 5.$$

Norint sėkmingai naudotis lyginiais prireiks keleto pastebėjimų:

- $a \equiv b \pmod m$ tada ir tik tada, kai a ir b duoda vienodas liekanas dalijami iš m,
- $a \equiv b \pmod m$ tada ir tik tada, kai egzistuoja toks $k \in \mathbb{Z}$, kad $a = b + km$,
- jei $a \equiv b \pmod m$ ir $b \equiv c \pmod m$, tai $a \equiv c \pmod m$.

Pirmasis teiginys leidžia intuityviai interpretuoti lyginius - a lygsta b moduliu m reiškia, kad a ir b duoda tas pačias liekanas dalijami iš m. Žinoma, kad tokiu atvėju a ir b skirtumas dalijasi iš m, kas yra kitu būdu užrašyta antrąjame teiginyje. Naudojant šią interpretaciją, akivaizdžiu tampa ir trečias teiginys: jei a duoda tokią pačią liekaną kaip b, o b tokią pačią, kaip c, tai a ir c liekanos taip pat sutaps.

Kaip ir įprastinių lygčių atveju, lyginius galima sudėti, dauginti ir atsargiai dalinti:

Teiginys.

- *jei* $a \equiv b \pmod m$ *ir* $a' \equiv b' \pmod m$, *tai* $a + a' \equiv b + b' \pmod m$;
- *jei* $a \equiv b \pmod m$ *ir* $a' \equiv b' \pmod m$, *tai* $aa' \equiv bb' \pmod m$;
- *jei* $ac \equiv bc \pmod m$ *ir* $\mathrm{dbd}(m, c) = 1$, *tai* $a \equiv b \pmod m$.

Įrodymas. Įrodykime visus tris naudodamiesi apibrėžimu:

- Jei $m|a-b$ ir $m|a'-b'$, tai $m|(a-b)+(a'-b') \Rightarrow m|(a+a')-(b+b')$.
- Jei $m|a-b$ ir $m|a'-b'$, tai $m|(a-b)a'$ ir $m|(a'-b')b \Rightarrow m|(a-b)a' + (a'-b')b \Rightarrow m|aa' - bb'$.
- Jei $m|ac-bc$, t.y. $m|(a-b)c$ ir m tarpusavyje pirminis su c, tai $m|a-b$.

□

Naudodamiesi šiomis savybėmis galime pertvarkyti sudėtingus reiškinius.

Pavyzdys. *Raskime, kokią liekaną duoda* $25^5 + 36^6$ *dalijamas iš* 11.

Kadangi $25 \equiv 3 \pmod{11}$, tai $25^5 \equiv 3^5 \pmod{11}$ (sudauginame lygybę ja pačia 5 kartus, t.y. keliame abi puses penktuoju laipsniu). Toliau $3^5 = 9 \cdot 9 \cdot 3$, o $9 \equiv -2 \pmod{11}$, todėl

$$3^5 \equiv (-2) \cdot (-2) \cdot 3 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Analogiškai

$$36^6 \equiv 3^6 \equiv 3^5 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Sudėję gauname, kad dalindami $25^5 + 36^6$ iš 11 gauname liekaną 4.

Dalumo požymiai dar kartą

Įrodykime dalumo požymį iš 11. Pastebėkime, kad $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Pakelkime abi lygybės puses n-tuoju laipsniu:

$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}.$$

Išskleidę skaičių dešimtaine išraiška, gauname:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = 10^{n-1}a_1 + \cdots + 10a_{n-1} + a_n \equiv (-1)^{n-1}a_1 + \cdots - a_{n-1} + a_n \pmod{11}.$$

Įrodykime dalumo požymį iš 8. Kadangi $2|10$, tai, kai $n \geqslant 3$, teisinga $8|10^n$ (t.y. $10^n \equiv 0 \pmod 8$). Pasinaudoję tuo gauname:

$$\begin{aligned}\overline{a_1a_2\ldots a_n} = 10^{n-1}a_1 + \cdots + 10a_{n-1} + a_n &\equiv 100a_{n-2} + 10a_{n-1} + a_n\\ &\equiv \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n} \pmod 8.\end{aligned}$$

Skaičių laipsnių liekanos

Sveikųjų skaičių laipsniai, o ypač kvadratai ir kubai, yra labai dažnai sutinkami skaičių teorijos uždaviniuose. Sveikųjų skaičių laipsnių liekanos turi įdomią struktūrą, kurią gana plačiai nagrinėsime vėliau, tačiau susipažinti galime jau dabar. Pradėkime nuo paties paprasčiausio pavyzdžio:

Pavyzdys. *Sveikojo skaičiaus kvadratą dalindami iš* 3 *niekada negausime liekanos* 2.

Imkime bet kokį sveikąjį skaičių a. Galimi trys variantai:

$$a \equiv 0 \pmod 3 \text{ arba } a \equiv 1 \pmod 3, \text{ arba } a \equiv 2 \pmod 3.$$

Pakėlę a kvadratu atitinkamai gausime

$$a^2 \equiv 0 \pmod 3 \text{ arba } a^2 \equiv 1 \pmod 3, \text{ arba } a^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3,$$

t.y. liekanos 2 niekada negausime.

Lygiai taip pat nagrinėdami atvejus galime susidoroti su visais nedideliais laipsniais ir moduliais.

Pavyzdys. *Kokias liekanas galime gauti dalindami* a^4 *iš* 5*, jei* a *bet koks sveikasis skaičius?*

Nagrinėkime penkis variantus:

$$\begin{aligned}a \equiv 0 \pmod 5 &\Rightarrow a^4 \equiv 0 \pmod 5,\\ a \equiv 1 \pmod 5 &\Rightarrow a^4 \equiv 1 \pmod 5,\\ a \equiv 2 \pmod 5 &\Rightarrow a^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5,\\ a \equiv 3 \pmod 5 &\Rightarrow a^4 \equiv (-2)^4 \equiv 1 \pmod 5,\\ a \equiv 4 \pmod 5 &\Rightarrow a^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1 \pmod 5.\end{aligned}$$

Gavome, kad galime gauti tik liekanas 0 arba 1.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. *Raskite, kokią liekaną gauname dalindami* 2^{1000} *iš* 11.

Sprendimas. Liekaną rasime dviem būdais, kurie abu yra pamokantys. Pirma, pabandykime kuo greičiau suskaičiuoti didelius dvejeto laipsnius vis daugindami lygybes:

$$\begin{aligned}
2^4 &\equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow \\
2^8 &\equiv 5^2 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow \\
2^{24} &\equiv 3^3 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow \\
2^{48} &\equiv 5^2 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow \\
2^{1000} &\equiv (2^{48})^{10}(2^{48})^{10}(2^4)^{10} \equiv 3^{10}3^{10}5^{10} \equiv 45^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Arba kelkime laipsniais po vieną ir ieškokime dėsningumų:

$$\begin{array}{ll}
2^1 \equiv 2 \pmod{11}, & 2^8 \equiv 7\cdot 2 \equiv 3 \pmod{11}, \\
2^2 \equiv 4 \pmod{11}, & 2^9 \equiv 3\cdot 2 \equiv 6 \pmod{11}, \\
2^3 \equiv 8 \pmod{11}, & \mathbf{2^{10}} \equiv 6\cdot 2 \equiv \mathbf{1} \pmod{11}, \\
2^4 \equiv 5 \pmod{11}, & 2^{11} \equiv 1\cdot 2 \equiv 2 \pmod{11}, \\
2^5 \equiv 5\cdot 2 \equiv 10 \pmod{11}, & 2^{12} \equiv 2\cdot 2 \equiv 4 \pmod{11}, \\
2^6 \equiv 10\cdot 2 \equiv 9 \pmod{11}, & 2^{13} \equiv 4\cdot 2 \equiv 8 \pmod{11}, \\
2^7 \equiv 9\cdot 2 \equiv 7 \pmod{11}, & \cdots
\end{array}$$

Matome, kad liekanos pradeda kartotis kas dešimt, vadinasi, tūkstantojo laipsnio bus tokia pat kaip ir dešimtojo, t.y. lygi 1. △

Pavyzdys 2. *Įrodykite, kad* $n^3 - n$ *dalijasi iš* 6 *su visomis sveikosiomis* n *reikšmėmis.*

Sprendimas. Vėl išspręskime dviem būdais. Pirmasis gudrus: pastebėkime, kad $n^3 - n$ išsiskaido kaip $(n-1)n(n+1)$. Iš trijų paeiliui einančių sveikųjų skaičių bent vienas dalijasi iš trijų ir bent vienas dalijasi iš dviejų, vadinasi, jų sandauga dalijasi iš 6.

Antrasis - universalus: skaičius n dalijamas iš 6 gali duoti liekanas $0, 1, \ldots 5$. Patikrinkime kiekvieną iš jų:

$$\begin{aligned}
&n \equiv 0 \pmod 6 \Rightarrow n^3 - n \equiv 0 - 0 \equiv 0 \pmod 6, \\
&n \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow n^3 - n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 6, \\
&n \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow n^3 - n \equiv 8 - 2 \equiv 0 \pmod 6, \\
&n \equiv 3 \pmod 6 \Rightarrow n^3 - n \equiv 27 - 3 \equiv 0 \pmod 6, \\
&n \equiv 4 \equiv -2 \pmod 6 \Rightarrow n^3 - n \equiv -8 - (-2) \equiv 0 \pmod 6, \\
&n \equiv 5 \equiv -1 \pmod 6 \Rightarrow n^3 - n \equiv -1 - (-1) \equiv 0 \pmod 6.
\end{aligned}$$

△

Uždaviniai

1. Raskite liekanas, gaunamas dalijant *S*
   a) $1 + 11 + 111 + 1111 + 11111$ iš 9,
   b) $555 \cdot 777 + 666 \cdot 888$ iš 9,
   c) 3^{99} iš 2,3,4,5,6 ir 7,
   d) 7^{777} iš 10.

2. Įrodykite, kad $ab + cd \equiv ad + bc \pmod{a - c}$. *S*

3. Kokias liekanas galime gauti dalindami sveikojo skaičiaus kvadratą iš 4? *S*

4. Įrodykite, kad $30|n^5 - n$. *S*

5. Įrodykite, kad jei $3|a^2 + b^2$, tai $3|a$ ir $3|b$. *S*

6. Įrodykite, kad jei $7|a^2 + b^2$, tai $7|a$ ir $7|b$. *S*

7. Įrodykite, kad nelyginio skaičiaus kvadratas duoda liekaną 1 dalijamas iš 8. *S*

8. Įrodykite, kad $6|a + b + c$ tada ir tik tada, kai $6|a^3 + b^3 + c^3$ *S*

9. Įrodykite, kad jei skaičius a nesidalija iš 2 ir iš 3, tai $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$. *S*

10. Įrodykite, kad dviejų nelyginių skaičių kvadratų suma negali būti kvadaratas. *S*

11. Su kuriomis n reikšmėmis $120|(n^5 - n)$? *S*

12. Raskite visus pirminius p ir q tenkinančius lygybę $p^2 - 2q^2 = 1$. *S*

13. Įrodykite, kad $n^2 + 3n + 5$ nesidalija iš 121 su visomis n reikšmėmis. *S*

14. [LitKo 2002] Įrodykite, kad $10^n + 45n - 1$ dalijasi iš 27. *S*

15. Įrodykite, kad skaičiaus ir jo skaitmenų sumos dalybos iš 9 liekanos sutampa. *S*

16. Įrodykite, kad jei $a \equiv b \pmod{n}$, tai $\mathrm{dbd}(a, n) = \mathrm{dbd}(b, n)$. *S*

17. [LitKo 2003] Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $36^n + 24^n - 7^n - 5^n$ dalijasi iš 899 be liekanos. *S*

18. Įrodykite, kad jei p pirminis, tai $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$. *S*

19. Tegu q daugianaris su sveikaisiais koeficientais. Įrodykite, kad bet kokiems sveikiesiems x ir y teisinga $q(x) \equiv q(x + y) \pmod{y}$. *S*

20. [LitMo 1988] Kiek skaitmenų turi skaičius $1010\cdots101$, jeigu jis dalijasi iš 9999? *S*

21. Raskite visus pirminius skaičius p, su kuriais $11 + p^2$ turi ne daugiau nei 11 daliklių. *S*

1.3 Oilerio teorema

Praeitame skyrelyje ieškodami skaičiaus 2^{1000} dalybos iš 11 liekanos pastebėjome, kad keldami dvejetą laipsniais $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ kažkada gauname liekaną 1, ir liekanos pradeda kartotis. Pasirodo, šis pastebėjimas tinka daugumai skaičių. Oilerio teorema kaip tik tai ir įrodo bei apibūdina kartojimosi periodą. Jos atskiras atvėjis yra mažoji Ferma (tariama Fermã) teorema, kurioje apsiribojama pirminiais moduliais. Nuo jos ir pradėkime.

Mažoji Ferma teorema

Teorema. *Tegu p pirminis skaičius, o a bet koks sveikasis, nesidalijantis iš p. Tuomet*

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p).$$

Įrodymas. Užrašykime visas skirtingas dalybos iš p liekanas išskyrus 0:

$$1, 2, 3, \ldots, p-2, p-1.$$

Padauginkime kiekvieną iš jų iš a:

$$1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \ldots, (p-2) \cdot a, (p-1) \cdot a.$$

Parodysime, kad gautojo skaičių rinkinio dalybos iš p liekanos yra taip pat visos skirtingos ir be 0, t.y. tokios pačios kaip pirmojo, tik, galbūt, sumaišyta tvarka. Kad tarp jų nėra 0 pamatyti nesunku, o kad jos visos skirtingos, įrodysime prieštaros būdu: jei kokių nors dviejų skaičių $k \cdot a$ ir $j \cdot a$ būtų vienodos, tai jų skirtumas dalintųsi iš p. Tačiau jų skirtumas lygus $a(k-j)$ ir dalintis iš p negali, nes a iš p nesidalija pagal sąlygą, o $k-j$ yra už p mažesnis.

Vadinasi, kadangi abiejų rinkinių dalybos iš p liekanų aibės sutampa, tai jų skaičius sudauginę gausime po tą pačią liekaną:

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv a \cdot 1 \cdot a \cdot 2 \cdots a \cdot (p-1) \ (\mathrm{mod}\ p) \Rightarrow$$
$$(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)! \ (\mathrm{mod}\ p).$$

Kadangi $\mathrm{dbd}((p-1)!, p) = 1$, tai galime padalinti:

$$a^p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p).$$

□

Pastaba. Mažąją Ferma teoremą galima perrašyti kaip $a^p \equiv a \ (\mathrm{mod}\ p)$. Ši lygybė kartais yra patogesnė, nes galioja ir liekanai 0.

Naudojantis mažąja Ferma teorema ieškoti sveikųjų skaičių laipsnių liekanų moduliu pirminio skaičiaus tampa visai paprasta:

Pavyzdys. *Raskite, kokią liekaną gausime dalindami 7^{727} iš 17.*

Pagal mažąją Ferma teoremą $7^{16} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 17)$. Kadangi $727 = 720+7 = 16 \cdot 45+7$, tai

$$7^{727} \equiv (7^{16})^{45} \cdot 7^7 \equiv 7^7 \ (\mathrm{mod}\ 17).$$

Likusį 7^7 suskaičiuojame rankomis:

$$7^7 \equiv 49^3 \cdot 7 \equiv (-2)^3 \cdot 7 \equiv 12 \ (\mathrm{mod}\ 17).$$

Oilerio φ funkcija

Įrodinėdami mažąją teoremą ne be reikalo atskyrėme liekaną 0 - skaičių besidalijantį iš p keldami laipsniais tikrai niekada negausime liekanos 1 moduliu p. Nagrinėjant dalybą iš sudėtinio skaičiaus tokių skaičių atsiranda daugiau. Pavyzdžiui, moduliu 6 nei dvejeto, nei trejeto, nei ketverto laipsniai niekada neduos liekanos 1. Tokius skaičius atmesime ir nagrinėsime tik tuos, su kuriais liekaną 1 gauti galime. Kaip pamatysime Oilerio teoremos įrodyme, mums tinkantys skaičiai moduliu n bus tarpusavyje pirminiai su n. Oilerio φ funkcija kaip tik ir žymi, kiek tokių skaičių yra.

Apibrėžimas. $\varphi(n)$ žymi kiek yra skaičių nedidesnių nei n ir tarpusavyje pirminių su n, t.y.

$$\varphi(n) = \#\{a | 1 \leq a < n, \mathrm{dbd}(a, n) = 1\}.$$

Nedideliems skaičiams φ reikšmę suskaičiuoti nesunku. Pavyzdžiui $\varphi(6) = 2$, nes vieninteliai skaičiai tarpusavyje pirminiai ir ne didesni nei 6 yra 1 ir 5. Bendru atveju skaičiuoti galima naudojantis formule.

Teiginys.

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1})(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}).$$

Įrodymas. Suskaičiuokime, kiek yra skaičių, kurie *nėra* tarpusavyje pirminiai su duotuoju. Pažymėję $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ gausime, kad skaičių, ne didesnių nei n ir besidalijančių iš p_1 yra $\frac{n}{p_1}$, besidalijančių iš p_2 yra $\frac{n}{p_2}$, ..., besidalijančių iš p_k yra $\frac{n}{p_k}$. Jei sudėsime

$$\frac{n}{p_1} + \cdots + \frac{n}{p_k},$$

tai skaičiùs, kurie dalijasi bent iš dviejų pirminių, būsime įskaičiavę per daug kartų, todėl turime atimti:

$$\frac{n}{p_1} + \cdots + \frac{n}{p_k} - \frac{n}{p_1 p_2} - \cdots - \frac{n}{p_{k-1} p_k}.$$

Tačiau šį kartą, skaičius, kurie dalijasi bent iš trijų pirminių, būsime įskaičiavę per mažai kartų, todėl turime pridėti:

$$\frac{n}{p_1} + \cdots + \frac{n}{p_k} - \frac{n}{p_1 p_2} - \cdots - \frac{n}{p_{k-1} p_k} + \frac{n}{p_1 p_2 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{n-2} p_{n-1} p_n}.$$

Taip tęsdami galiausiai suskaičiuosime, kiek yra skaičių ne tarpusavyje pirminių su n. Atėmę gautą rezultatą iš n rasime $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n - (\frac{n}{p_1} + \cdots + \frac{n}{p_k} - \frac{n}{p_1 p_2} - \cdots - \frac{n}{p_{k-1} p_k} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{n}{p_1 \cdots p_k}) \\
&= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) \\
&= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1})(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}).
\end{aligned}$$

□

Oilerio teorema

Teorema. *Tegu n natūralusis skaičius, o a sveikasis ir tarpusavyje pirminis su n. Tuomet*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n).$$

Įrodymas. Užrašykime visas skirtingas dalybos iš n liekanas tarpusavyje pirmines su n:

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}.$$

Padauginkime kiekvieną iš jų iš a:

$$r_1 \cdot a, r_2 \cdot a, \ldots, r_{\varphi(n)} \cdot a.$$

Parodysime, kad gautojo skaičių rinkinio dalybos iš n liekanos yra taip pat visos skirtingos ir tarpusavyje pirminės su n, t.y. tokios pačios kaip pirmojo rinkinio, tik, galbūt, sumaišyta tvarka. Kad jos visos tarpusavyje pirminės su n seka, iš to, kad ir r_i ir a yra tarpusavyje pirminiai su n. Kad jos visos skirtingos, įrodysime prieštaros būdu: jei kokių nors dviejų skaičių $r_k \cdot a$ ir $r_j \cdot a$ dalybos liekanos būtų vienodos, tai jų skirtumas dalintųsi iš n. Tačiau jų skirtumas lygus $a(r_k - r_j)$ ir dalintis iš n negali, nes a yra tarpusavyje pirminis su n, o $r_k - r_j$ yra už n mažesnis.

Vadinasi, kadangi abiejų rinkinių dalybos iš n liekanų aibės sutampa, tai jų skaičius sudauginę gausime po tą pačią liekaną:

$$r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(n)} \equiv a^{\varphi(n)} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(n)} \ (\text{mod}\ m).$$

Kadangi $\text{dbd}(r_1 \cdots r_{\varphi(n)}, p) = 1$, tai galime padalinti:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (\text{mod}\ n).$$

□

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. *Raskite paskutinį skaičiaus 13^{13} skaitmenį*

Sprendimas. Paskutinis skaičiaus skaitmuo yra toks pat, kaip ir dalybos iš 10 liekana. Kadangi 13 ir 10 yra tarpusavyje pirminiai, tai galime pasinaudoti Oilerio teorema. Raskime $\varphi(10)$:

$$\varphi(10) = \varphi(2 \cdot 5) = (2^1 - 2^0)(5^1 - 5^0) = 4.$$

Tuomet pagal Oilerio teoremą $13^4 \equiv 1$ (mod 10), todėl

$$13^{13} = 13^{12} \cdot 13 \equiv 13 \equiv 3 \ (\text{mod}\ 10).$$

△

Pavyzdys 2. *Raskite paskutinį skaičiaus $13^{13^{13}}$ skaitmenį.*

Sprendimas. Kadangi pagal praeitą pavyzdį $13^4 \equiv 1 \pmod{10}$, tai reikia rasti, kokią liekaną gausime dalindami laipsnį 13^{13} iš 4. Tą padaryti visai nesunku - $13^{13} \equiv 1^{13} \equiv 1 \pmod 4$. Gavome

$$13^{13^{13}} \equiv 13^1 \equiv 3 \pmod{10}.$$

△

Pavyzdys 3. *Raskite du paskutiniuosius skaičiaus* $133333^{13333^{1333^{133^{13}}}}$ *skaitmenis*

Sprendimas. Paskutiniai du skaičiaus skaitmenys yra tokie patys, kaip ir dalybos iš 100 liekana. Kadangi 100 ir 133333 yra tarpusavyje pirminiai, tai galime taikyti Oilerio teoremą. Raskime $\varphi(100)$:

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = (2^2 - 2^1)(5^2 - 5) = 40.$$

Norėdami rasti laipsnio $13333^{1333^{133^{13}}}$ liekaną moduliu 40, dar kartą taikykime Oilerio teoremą. Randame $\varphi(40) = 16$.

Norėdami rasti laipsnio $1333^{133^{13}}$ liekaną moduliu 16, dar kartą taikykime Oilerio teoremą. Randame $\varphi(16) = 8$.

Norėdami rasti laipsnio 133^{13} liekaną moduliu 8, dar kartą (pagaliau paskutinįjį) taikykime Olerio teoremą. Kadangi $\varphi(8) = 4$, tai

$$133^{13} \equiv 133^1 \equiv 5 \pmod 8,$$

tada

$$1333^{133^{13}} \equiv 1333^5 \equiv 5^5 \equiv 5 \pmod{16},$$

tada

$$13333^{1333^{133^{13}}} \equiv 13333^5 \equiv 13^5 \equiv 13 \pmod{40},$$

tada

$$133333^{13333^{1333^{133^{13}}}} \equiv 133333^{13} \equiv 33^{13} \equiv 33 \cdot (-11)^6 \equiv 33 \cdot 21^3 \equiv 13 \pmod{100}.$$

Gavome, kad $133333^{13333^{1333^{133^{13}}}}$ paskutiniai du skaitmenys yra 13. △

Uždaviniai

1. Raskite, kokią liekaną gausime dalindami 3^{33} iš 13, 7^{77} iš 17, 9^{99} iš 19. *S*
2. Raskite $11^{11^{11}}$ dalybos iš 15 liekaną. *S*
3. Kodėl keldami laipsniais skaičius, kurie nėra tarpusavyje pirminiai su n, niekada negausime liekanos 1 moduliu n? *S*
4. Tegu p, q pirminiai. Įrodykite, kad $pq | n^{pq} - n^p - n^q + n$ su visais $n \in \mathbb{N}$. *S*
5. Tegu a,b,c sveikieji skaičiai ir $a + b + c = 0$. Ar gali $a^{47} + b^{47} + c^{47}$ būti pirminis? *S*

6. Įrodykite, kad kiekvienam pirminiam p, išskyrus 2 ir 5, egzistuoja be galo daug pavidalo $11\ldots11$ skaičių, besidalijančių iš p. *S*

7. [LitKo 2002] Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių n, kad $2003^n - 1$ dalijasi iš n be liekanos. *S*

8. [Bulgaria Winter Competition 2009] Ant lentos užrašytas natūralusis skaičius. Prie jo dešinės galime prirašyti bet kokį skaitmenį išskyrus 9. Įrodykite, kad kaip berašinėtume, ilgainiui gausime sudėtinį skaičių. *S*

9. [CWMO 2008] Tegu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ natūralieji skaičiai, $m \geqslant 2$. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų n, su kuriais $a_1 1^n + a_2 2^n + \cdots + a_m m^n$ yra sudėtinis. *S*

10. [CMO 2008] Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, visiems pirminiams p ir natūraliesiems n tenkinančias *S*
$$f(n)^p \equiv n \pmod{f(p)}.$$

11. [IMO 2005] Raskite sveikuosius skaičius, kurie yra tarpusavyje pirminiai su visais sekos $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ nariais. *S*

1.4 Kinų liekanų teorema

Raskime skaičiaus 2^{100} dalybos iš 10 liekaną. Oilerio teoremos naudoti negalime, nes 2 ir 10 nėra tarpusavyje pirminiai. Išeitis yra uždavinį išskaidyti į dvi dalis - rasti liekaną moduliu 2 ir moduliu 5 atskirai. Tai padaryti nesunku - pagal Oilerio teoremą

$$2^{100} \equiv 1 \pmod 5,$$

ir, akivaizdžiai,

$$2^{100} \equiv 0 \pmod 2.$$

Kaip sujungti gautą informaciją? Jei užsirašysime $2^{100} = 10k + r$, kur r yra ieškoma dalybos liekana, tai gausime, jog r turi tenkinti du lyginius vienu metu:

$$\begin{cases} r \equiv 1 \pmod 5 \\ r \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

Tarp skaičių nuo 0 iki 9 toks yra tik vienas - 6. Jis ir bus ieškoma liekana.

Kinų liekanų teorema yra šio samprotavimo apibendrinimas:

Teorema (Kinų liekanų teorema)**.** *Tegu $n = m_1 m_2 \cdots m_k$, kur visi m_i yra paporiui tarpusavyje pirminiai. Visiems sveikiesiems $r_1, r_2, \ldots r_k$ lyginių sistema*

$$\begin{cases} r \equiv r_1 \ (mod\ m_1) \\ r \equiv r_2 \ (mod\ m_2) \\ \vdots \\ r \equiv r_k \ (mod\ m_k) \end{cases}$$

turi vienintėlį sprendinį intervale $[0, n-1]$.

Įrodymas. Pirmiausia įrodykime, kad bent vieną sprendinį turi paprastesnė lyginių sistema:

$$\begin{cases} r \equiv 1 \pmod{m_1} \\ r \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ r \equiv 0 \pmod{m_k} \end{cases}$$

Išties, kadangi m_1 ir $m_2 m_3 \cdots m_k$ yra tarpusavyje pirminiai, t.y. jų didžiausias bendras daliklis yra lygus 1, tai pagal Euklido algoritmo išvadą egzistuoja tokie sveikieji x ir y, kad $x m_1 + y m_2 m_3 \cdots m_k = 1$. Skaičius $y m_2 m_3 \cdots m_k$ kaip tik ir bus sprendinys. Pažymėkime jį e_1.

Išsprendę analogiškas sistemas, kur liekana 1 atitiks vis kitą m_i gausime k skaičių $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Nesunku įsitikinti, kad sudauginę paporiui $e_1 r_1 + e_2 r_2 + \cdots e_k r_k$ gausime pradinės sistemos sprendinį.

Parodysime, kad visi sistemos sprendiniai skiriasi per n kartotinį. Tarkime, kad turime du sistemos sprendinius r ir r'. Jie duoda vienodas liekanas dalijami iš visų m_i, todėl $m_1 | (r - r')$, $m_2 | (r - r'), \ldots, m_k | (r - r')$. Kadangi visi m_i yra paporiui tarpusavyje pirminiai, tai gauname, kad $n | (r - r')$.

Galiausiai pastebėkime, kad jei prie vieno sprendinio pridėsime ar atimsime n, gausime kitą sprendinį. Tai ir įrodo, kad bus lygiai vienas sprendinys intervale $[0, n-1]$. $\square$

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. *Išspręskite lyginių sistemas:*

$$\begin{cases} r \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ r \equiv 2 \ (mod\ 5), \\ r \equiv 2 \ (mod\ 7); \end{cases} \quad ir \quad \begin{cases} r \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ r \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ r \equiv 3 \ (mod\ 5). \end{cases}$$

Sprendimas. Nors kinų liekanų teoremos įrodymas konstruktyvus (t.y. jo metu yra parodoma, kaip gauti sprendinius), retai kada jis praverčia sprendžiant konkrečią sistemą. Dažniausiai efektyviau pabandyti tiesiog atspėti sprendinį, arba spręsti lygtis po vieną ir ieškoti bendrų sprendinių. Tą ir padarysime.

Geriau įsižiūrėjus į pirmąją sistemą turėtų būti nesunku iš karto atspėti, kad jos sprendiniu bus $r = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2$ arba tiesiog $r = 2$.

Antroji sistema kiek sudėtingesnė. Iš lygties $r \equiv 3 \pmod 5$ žinome, kad sprendinio paskutinis skaitmuo bus 3 arba 8. Tačiau pastarasis netinka, nes $r \equiv 1 \pmod 2$. Lieka iš skaičių, kurių paskutinis skaitmuo 3 rasti tenkinantį lygtį $r \equiv 2 \pmod 3$. Patikrinę keletą variantų randame $r = 23$. △

Pavyzdys 2. *Išspręskite lyginių sistemą:*

$$\begin{cases} 2r \equiv 1 \ (mod\ 3), \\ 3r \equiv 2 \ (mod\ 5), \\ 4r \equiv 3 \ (mod\ 7). \end{cases}$$

Sprendimas. Pertvarkykime lygtis. Pastebėkime, kad $2r \equiv 1 \pmod 3$ tada ir tik tada, kai $4r \equiv 2 \pmod 3$, nes $\mathrm{dbd}(2, 3) = 1$. Kadangi $4r \equiv r \pmod 3$, tai vietoje buvusios pirmosios lygties gauname ekvivalenčią $r \equiv 2 \pmod 3$. Analogiškai iš 2 padauginę ir likusias gausime sistemą

$$\begin{cases} r \equiv 2 \pmod 3, \\ r \equiv 4 \pmod 5, \\ r \equiv 6 \pmod 7. \end{cases}$$

Nesunku atspėti, kad $r = 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1$ (arba tiesiog $r = -1$) yra šios sistemos sprendinys.

△

Pavyzdys 3. *Įrodykite, kad egzistuoja dešimt paeiliui einančių natūraliųjų skaičių, besidalinančių iš dešimtųjų pirminių skaičių laipsnių.*

Sprendimas. Išsirinkime bet kokius dešimt pirminių skaičių $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$. Įrodysime, kad egzistuoja toks natūralusis r, kad $p_1^{10}|r$, $p_2^{10}|r+1$, ..., $p_{10}^{10}|r+9$, tuomet $r, r+1, \ldots, r+9$ ir bus ieškomi paeiliu einantys skaičiai. Tačiau perrašę sąlygas kaip

$$\begin{cases} r \equiv 0 \pmod{p_1^{10}} \\ r \equiv -1 \pmod{p_2^{10}} \\ \ldots \\ r \equiv -9 \pmod{p_{10}^{10}} \end{cases}$$

matome, kad toks r egzistuos pagal Kinų liekanų teoremą. △

Uždaviniai

1. Išspręskite lyginių sistemas: *S*

$$\begin{cases} r \equiv 0 \pmod 5, \\ r \equiv 4 \pmod 7, \\ r \equiv 3 \pmod{11}; \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 3r \equiv 1 \pmod 5, \\ 3r \equiv 1 \pmod 7, \\ 3r \equiv 1 \pmod{11}. \end{cases}$$

2. Kokią liekaną gausime dalindami skaičių $123456789101112\ldots20082009$ iš 450? *S*

3. [Ireland 2000] Raskite mažiausiąjį natūralųjį a, kad $5x^{13} + 13x^5 + 9ax$ dalintųsi iš 65 su visomis natūraliomis x reikšmėmis. *S*

4. Ar egzistuoja toks natūralusis a, kad skaičiai $a, 2a, 3a, \ldots, 1997a$ būtų natūraliųjų skaičių laipsniai? *S*

5. [USAMO 2008] Įrodykite, kad kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ egzistuoja tarpusavyje pirminiai skaičiai $k_1, k_2, \ldots, k_n$, kad $k_1k_2 \cdots k_n - 1$ išsiskaido kaip dviejų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių sandauga. *S*

6. [France TST 2003] Sveikųjų skaičių gardelės plokštumoje tašką vadinsime nematomu, jei jį ir koordinačių pradžios tašką jungiančiai atkarpai priklauso dar bent vienas gardelės taškas. Įrodykite, kad kiekvienam n atsiras kvadratas, kurio kraštinės ilgis n ir kurio visi viduje esantys taškai yra nematomi. *S*

1.5 Liekanų grupė

Šiame skyrelyje kalbėsime apie liekanas atsiedami jas nuo konkrečių skaičių. Sakydami, pavyzdžiui, „sudauginę liekanas a ir b moduliu n gausime liekaną c" turėsime omenyje, kad sudauginę bet kokį skaičių, duodantį liekaną a su bet kokiu skaičiumi duodantį liekaną b gausime skaičių, duodantį liekaną c.

Nagrinėkime liekanas moduliu n, tarpusavyje pirmines su n. Jų daugyba pasižymi keturiomis savybėmis:

uždarumas - Sudauginę bet kurias dvi, vėl gausime liekaną, tarpusavyje pirminę su n;

vienetinis elementas - Egzistuoja tokia liekana, būtent 1, iš kurios dauginant kitas liekanas jos nepakinta;

atvirkštinis elementas - Kiekvienai liekanai egzistuoja jai atvirkštinė liekana, t.y. tokia, kad padauginę iš jos gauname 1;

asociatyvumas - Kiekvienoms liekanoms a, b, c yra teisinga lygybė $a(bc) = (ab)c$.

Pirmosios dvi savybės labai lengvai patikrinamos. Įrodykime trečiąją. Jei a ir n tarpusavyje pirminiai, tai pagal Euklido algoritmo išvadą, egzistuoja sveikieji skaičiai x ir y tenkinantys lygybę $ax + ny = 1$. Tuomet x ir bus atvirštinė a liekana, nes $ax \equiv 1 \pmod{n}$. Ketvirtoji savybė, atrodanti kiek neįprastai, galioja visiems sveikiesiems skaičiams, todėl galioja ir liekanoms.

Abstrakčiojoje algebroje aibė su joje apibrėžta operacija, tenkinančia šias keturias savybes, vadinama *grupe*, todėl kartais mes pagrįstai naudosime terminą *liekanų grupė*, turėdami omenyje liekanas moduliu n, tarpusavyje pirmines su n.

Liekanos eilė

Nagrinėkime liekanų moduliu n grupę.

Apibrėžimas. Liekanos a eile vadinsime mažiausią natūralųjį laipsnį s, su kuriuo $a^s \equiv 1 \pmod{n}$.

Apibrėžimas. Liekanų grupės eile vadinsime liekanų grupės elementų skaičių.

Naudodamiesi šiais terminais galime performuluoti Oilerio teoremą:

Teorema. *Liekanos eilė dalo grupės eilę.*

Įrodymas. Grupės eilė yra lygi liekanų, tarpusavyje pirminių su n, skaičiui, t.y $\varphi(n)$. Iš Oilerio teoremos žinome, kad bet kuriai liekanai a yra teisinga $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Tegu s yra a eilė ir tarkime, kad s nedalo $\varphi(n)$. Tada dalindami $\varphi(n)$ iš s gausime $\varphi(n) = qs + r$, kur $0 < r < s$. Tačiau tuomet

$$1 \equiv a^{\varphi(n)} \equiv a^{qs+r} \equiv a^r.$$

Gavome, kad egzistuoja mažesnis laipsnis už s, kuriuo pakėlę liekaną a gauname 1. Prieštara. $\square$

Panagrinėkime konkretų atvejį. Liekanų moduliu 7 grupę sudaro šešios liekanos $\{1,2,3,4,5,6\}$. Vadinasi, kiekvieno elemento eilė turi būti šešių daliklis. Patikrinkime:

$$1^1 \equiv 1 \text{ - eilė } 1;$$
$$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1 \text{ - eilė } 3;$$
$$3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6, 3^4 \equiv 4, 3^5 \equiv 5, 3^6 \equiv 1 \text{ - eilė } 6;$$
$$4^1 \equiv 4, 4^2 \equiv 2, 4^3 \equiv 1 \text{ - eilė } 3;$$
$$5^1 \equiv 5, 5^2 \equiv 4, 5^3 \equiv 6, 5^4 \equiv 2, 5^5 \equiv 3, 5^6 \equiv 1 \text{ - eilė } 6;$$
$$6^1 \equiv 6, 6^2 \equiv 1 \text{ - eilė } 2.$$

Ciklinė grupė moduliu p

Apibrėžimas. Liekanų grupę, kurios visas liekanas galime užrašyti kaip kažkurios vienos liekanos g laipsnius, vadinsime *cikline* grupe. Liekaną g vadinsime liekanų grupės *generatoriumi.*

Kaip matėme keliomis eilutėmis aukščiau, visas liekanas moduliu 7 tarpusavyje pimines su 7 galima užrašyti kaip trejeto (ir kaip penketo) laipsnius, tad ši grupė yra ciklinė ir ji turi du generatorius - 3 ir 5. Tai galioja ir bendresniu atveju:

Teorema. *Liekanų grupė moduliu pirminio skaičiaus p yra ciklinė.*

Įrodymą išskaidysime į atskiras dalis. Pirma, įrodysime, kad grupė yra ciklinė, jei egzistuoja liekana, kurios eilė sutampa su grupės eile. Antra, grupės eilę išskaidysime dauginamaisiais $p-1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$ ir įrodysime, kad egzistuoja elementai $g_1, g_2, \cdots, g_k$, kurių eilės yra atitinkamai $q_1^{\alpha_1}, q_2^{\alpha_2}, \cdots, q_k^{\alpha_k}$. Trečia, įrodysime, kad sandaugos $g_1 g_2 \cdots g_k$ eilė yra lygi grupės eilei.

Teiginys (Pirma dalis)**.** *Jei egzistuoja liekana, kurios eilė yra lygi liekanų grupės eilei, tai jos laipsniais galime užrašyti visas grupės liekanas.*

Įrodymas. Tarkime, kad egzistuoja liekana g, kurios eilė lygi grupės eilei $p-1$. Kelkime ją laipsniais $g^1, g^2, \ldots, g^{p-1}$. Jokie du iš jų negali būti lygūs. Išties, jei gautume, kad $g^i \equiv g^j$ $(i > j)$, tai iš to sektų $g^{i-j} \equiv 1$, ko būti negali, nes $i - j < p - 1$. Kadangi visi laipsniai yra skirtingi ir jų yra tiek, kiek grupės liekanų, tai šios dvi aibės sutampa. $\square$

Liekaną, panašiai kaip ir realųjį skaičių, vadinsime daugianario šaknimi, jei įstatę ją gauname nulinę liekaną. Toliau einančiuose teiginiuose turėsime omenyje, kad nagrinėjamos liekanos yra moduliu pirminio skaičiaus p.

Teiginys. *n - tojo laipsnio daugianaris turi ne daugiau kaip n šaknų.*

Įrodymas. Įrodykime naudodami indukciją. Pirmojo laipsnio daugianaris $x - a$ turi tik vieną šaknį a. Tarkime, kad $n-1$ laipsnio daugianaris turi ne daugiau kaip $n-1$ šaknį. Nagrinėkime n - tojo laipsnio daugianarį $p(x)$. Jei jis neturi nė vienos šaknies, tai teiginys teisingas. Jei turi šaknį a, tai galime jį išskaidyti $p(x) = (x-a)q(x)$, kur $q(x)$ yra $n-1$ laipsnio daugianaris. Kadangi daugianario $p(x)$ šaknis turi būti arba a, arba daugianario $q(x)$ šaknimi, tai pagal indukciją $p(x)$ turės ne daugiau nei $n - 1 + 1 = n$ šaknų. $\square$

Teiginys. *Daugianaris $x^{p-1} - 1$ turi lygiai $p - 1$ šaknį.*

Įrodymas. Pagal Oilerio teoremą, jo šaknimis yra visos liekanos. □

Teiginys. *Daugianaris $x^d - 1$, kur $d|p - 1$ turi lygiai d šaknų.*

Įrodymas. Išskaidykime daugianarį $x^{p-1} - 1$ dauginamaisiais:

$$x^{p-1} = (x^d - 1)(x^{p-1-d} + x^{p-1-2d} + \cdots + x^d + 1).$$

Kadangi kairėje pusėje esantis daugianaris turi $p-1$ šaknį, tai tiek pat šaknų turi turėti ir dešinėje pusėje esantis daugianaris. Jei $x^d - 1$ turėtų mažiau nei d šaknų, tai dešinėje pusėje esantis daugianaris turėtų mažiau nei $d + (p - 1 - d)$ šaknų. □

Teiginys (Antra dalis)**.** *Tegu $p - 1$ išsiskaido kaip $p - 1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$. Kiekvienam i egzistuoja liekana, kurios eilė yra $q_1^{\alpha_i}$.*

Įrodymas. Liekanos eilė bus lygi $q_i^{\alpha_i}$, jei ji bus šaknis daugianario $x^{q_i^{\alpha_i}} - 1$, bet nebus šaknis daugianario $x^{q_i^{\alpha_i - 1}} - 1$. Kadangi pirmasis daugianaris turi daugiau šaknų nei antrasis, tai $q_i^{\alpha_i}$ eilės liekana egzistuoja. □

Teiginys (Trečia dalis)**.** *liekanų sandaugos $g_1 g_2 \cdots g_k$ eilė yra lygi $p - 1$.*

Įrodymas. Sandaugos $g_1 g_2 \cdots g_k$ eilė dalo grupės eilę, todėl ją galime užrašyti $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_k^{\beta_k}$. Jei ji nėra lygi grupės eilei, tai bent vienas iš β_i yra mažesnis už α_i. Paprastumo dėlei tarkime, kad tai β_1. Pakėlę $g_1 g_2 \cdots g_k$ didesniu nei eilė laipsniu $q_1^{\beta_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$, gausime

$$1 \equiv (g_1 g_2 \cdots g_k)^{q_1^{\beta_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}} \equiv g_1^{q_1^{\beta_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}},$$

ko būti negali, nes g_1 eilė yra $q_1^{\alpha_1}$ ir ji nedalo $q_1^{\beta_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$. □

Teisingas yra ir kiek bendresnis teiginys - liekanų grupės yra ciklinės moduliu bet kokio pirminio skaičiaus laipsnio (p^n) ir moduliu bet kokio pirminio skaičiaus laipsnio, padauginto iš dviejų ($2p^n$). Šių teiginių įrodymų nepateiksime, nes jie ganėtinai ilgi ir sudėtingi.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. *Tegu liekanos a eilė moduliu pirminio p yra $2k$. Tuomet $a^k \equiv -1$ $(mod\ p)$.*

Sprendimas. Pastebėkime, kad $(a^k)^2 \equiv 1 \pmod{p}$, bet $a^k \not\equiv 1 \pmod{n}$. Kadangi daugianaris $x^2 - 1$ turi lygiai dvi šaknis 1 ir -1, tai a^k turi būti lygus antrajai. △

Pavyzdys 2. *Įrodykite Wilson teoremą: jei p pirminis, tai*

$$(p - 1)! \equiv -1 \ (mod\ p).$$

Sprendimas. Pirmasis įrodymas. Daugianario $x^{p-1}-1$ šaknimis yra visos liekanos moduliu p išskyrus 0, todėl galime išskaidyti

$$x^{p-1}-1 \equiv (x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1)).$$

Lieka įstatyti $x=0$.

Antrasis įrodymas. Kiekviena liekana turi sau atvirkštinę, su kuria sudauginta lygi 1. Suporavus liekanas su jų atvirkštinėmis, liks tos, kurios yra pačios sau atvirkštinės. Jos tenkina $x^2 \equiv 1 \pmod p$ ir yra tik dvi - 1 ir -1, ir jų sandauga lygi -1.

Trečiasis įrodymas. Kadangi liekanų moduliu p grupė yra ciklinė, tai visas liekanas galime užrašyti kaip generatoriaus g laipsnius $\{g^1, g^2, \cdots g^{p-1}\}$. Jų sandauga yra lygi $g^{p(p-1)/2}$. Kadangi $p(p-1)/2$ nesidalija iš $(p-1)$, tai $g^{p(p-1)/2} \not\equiv 1 \pmod p$. Kita vertus

$$(g^{p(p-1)/2})^2 \equiv 1 \pmod p,$$

o daugianaris x^2-1 turi tik dvi šaknis - 1 ir -1, todėl $g^{p(p-1)/2}$ turi būti lygus antrąjai. △

Pavyzdys 3. *Jei* $\mathrm{dbd}(a,b)=1$*, tai*

$$\mathrm{dbd}(a^n-b^n, a^m-b^m) = a^{\mathrm{dbd}(n,m)} - b^{\mathrm{dbd}(n,m)}.$$

Sprendimas. Akivaizdu, kad $a^{\mathrm{dbd}(n,m)} - b^{\mathrm{dbd}(n,m)} \mid \mathrm{dbd}(a^n-b^n, a^m-b^m)$. Įrodykime į kitą pusę. Pažymėkime $d = \mathrm{dbd}(a^n-b^n, a^m-b^m)$. Tuomet

$$a^n \equiv b^n \pmod d \iff (ab^{-1})^n \equiv 1 \pmod d$$

(atvirkštinė b liekana moduliu d egzistuos, nes $\mathrm{dbd}(a,b)=1 \implies \mathrm{dbd}(b,d)=1$). Analogiškai ir

$$(ab^{-1})^m \equiv 1 \pmod d.$$

Pasinaudoję Euklido algoritmo išvada ir išreiškę $\mathrm{dbd}(n,m) = xm+yn$ gauname, kad ir $(ab^{-1})^{\mathrm{dbd}(n,m)} \equiv 1 \pmod d$, t.y. $d \mid a^{\mathrm{dbd}(n,m)} - b^{\mathrm{dbd}(n,m)}$. △

Pavyzdys 4. *Įrodykite, kad* $6^{p-2}+3^{p-2}+2^{p-2}-1$ *dalijasi iš* p*, kur* $p>3$ *- pirminis.*

Sprendimas. Pateiksime kiek kitokį šio performuluoto IMO 2005 uždavinio sprendimą, nei skyrelyje „Oilerio teorema":

Pagal mažąją Ferma teoremą, gauname kad

$$6^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

vadinasi,

$$6^{p-2}+3^{p-2}+2^{p-2}-1 \equiv 6^{-1}+3^{-1}+2^{-1}-1 \equiv \frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1 \equiv 0 \pmod p.$$

Kiek pagrįstai susumavome liekanas lyg įprastas trupmenas? Pasirodo, visiškai pagrįstai. Įprasta trupmenų suma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{ay+bx}{ab}$ yra ne kas kita, kaip kitaip užrašyta lygybė

$$xa^{-1}+yb^{-1} = (ay+bx)a^{-1}b^{-1},$$

kuri, akivaizdu (pakanka atskliausti), yra teisinga ir liekanoms. △

Uždaviniai

1. Raskite liekanų grupės moduliu 11 generatorius. *S*

2. Įrodykite, kad liekanos ir jos atvirkštinės liekanos eilės sutampa. *S*

3. Kodėl visos liekanos moduliu sudėtinio skaičiaus nesudaro grupės? *S*

4. Teiginys, kad n-tojo laipsnio daugianaris turi ne daugiau nei n šaknų nėra teisingas liekanoms moduliu sudėtinio skaičiaus. Pavyzdžiui, moduliu 6 daugianaris x^2+x turi keturias šaknis $0, 2, 3$ ir 5. Kuri teiginio įrodymo dalis tampa neteisinga sudėtiniams skaičiams? *S*

5. Tegu p - nelyginis pirminis skaičius. Įrodykite, kad a yra liekanų mod p generatorius tada ir tik tada, kai $a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ su visais pirminiais $p-1$ dalikliais q. *S*

6. Įrodykite, kad liekanų grupė moduliu pirminio p turi $\varphi(p-1)$ generatorių. *S*

7. Parodykite, kad 2 - liekanų grupės moduliu 29 generatorius. Parodę išspręskite lygtis: *S*
   a) $x^7 \equiv 1 \pmod{29}$
   b) $x^6 + x^5 + ... + x + 1 \equiv 0 \pmod{29}$

8. Įrodykite, kad visų grupės moduliu pirminio p generatorių sandauga lygi $(-1)^{\varphi(p-1)}$ *S*

9. Išspręskite lygtį $x^{17} \equiv 1$ mod 19. *S*

10. Įrodykite, kad $1^k + 2^k + ... + (p-1)^k \equiv 0 \pmod{p}$, jei $p-1$ nedalo k ir $\equiv -1 \pmod{p}$, jei $p-1$ dalo k. *S*

11. Tegu $p = 2^n + 1, n \geqslant 2$ - pirminis skaičius. Įrodykite, kad 3 yra grupės moduliu p generatorius: *S*
    a) Tegu g vienas iš grupės moduliu p generatorių. Parodykite, kad visi nelyginiai g laipsniai taip pat bus generatoriais.
    b) Parodykite, kad jei 3 nėra generatorius, tai $-3 \equiv a^2 \pmod{p}$ su kažkokiu a.
    c) Tegu $2u \equiv a - 1 \pmod{p}$. Parodykite, kad u yra trečios eilės elementas.
    d) Gaukite prieštarą.

12. Įrodykite, kad jei a yra trečios eilės elementas moduliu pirminio $p > 3$, tai $a+1$ yra šeštos eilės elementas mod p. *S*

13. Įrodykite, kad liekanų grupė moduliu pq, kur p ir q skirtingi pirminiai skaičiai, nėra ciklinė. *S*

14. Įrodykite, kad n nedalo $2^n - 1$, kur $n > 1$ natūralusis skaičius. *S*

15. [Ireland 1992] Įrodykite, kad visų natūraliųjų skaičių, mažesnių už n ir tarpusavyje pirminių su n, kubų suma dalijasi iš n. *S*

16. Raskite visus daugianarius $q(x)$ su sveikais koeficientais, tenkinančius $q(n)|2^n - 1$ su visais $n \in \mathbb{N}$. *S*

17. Raskite visus pirminius p ir q, su kuriais $pq|2^p + 2^q$. *S*

18. [Russia 2009] Tegu x, y - sveikieji skaičiai ir $2 \leqslant x, y, \leqslant 100$. Įrodykite, kad egzistuoja toks $n \in \mathbb{N}$, su kuriuo $x^{2^n} + y^{2^n}$ nėra pirminis. *S*

19. [INAMO 2009] Įrodykite, kad kiekvieniems tarpusavyje pirminiams a ir b egzistuoja tokie natūralieji m ir n, kad $a|m, b|n$, bet $a \nmid n, b \nmid m$, ir tenkinantys *S*

$$m|n^2 + n \text{ ir } n|m^2 + m.$$

20. [India TST] Tegu $n \geqslant 2$ - natūralusis skaičius ir $n|3^n + 4^n$. Įrodykite, kad $7|n$. *S*

21. [Hong Kong TST 2009] Įrodykite, kad lygtis $x^{37} \equiv y^3 + 11 \pmod p$ turi sprendinių su visais pirminiais $p \leqslant 100$. *S*

1.6 Kvadratinės liekanos

Šiame skyrelyje apžvelgsime teoriją, apibūdinančią, kokias liekanas galime gauti dalindami sveikųjų skaičių kvadratus iš pirminių skaičių.

Apibrėžimas. Liekanas moduliu pirminio skaičiaus p, kurias galime gauti dalindami sveikųjų skaičių kvadratus iš p, vadinsime *kvadratinėmis*, o tas, kurių negalime, *nekvadratinėmis*. Nulinę liekaną laikysime išskirtine. Kvadratinėms ir nekvadratinėms liekanoms žymėti naudosime Ležandro simbolį:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{jei } a \text{ yra kvadratinė liekana moduliu } p, \\ -1, & \text{jei } a \text{ nėra kvadratinė liekana moduliu } p, \\ 0, & \text{jei } a \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Pažiūrėkime, kaip tai atrodo konkrečiu atveju:

Pavyzdys. *Raskime visas kvadratines liekanas moduliu* 7*.*

Sprendimas. Pakelkime visas liekanas moduliu 7 kvadratu:

$$1^2 \equiv 1 \pmod{7},\ 2^2 \equiv 4 \pmod{7},\ 3^2 \equiv 2 \pmod{7},$$
$$4^2 \equiv 2 \pmod{7},\ 5^2 \equiv 4 \pmod{7},\ 6^2 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Gavome, kad kvadratinės liekanos yra 1, 2 ir 4, o nekvadratinės 3, 5 ir 6. Naudodami Ležandro simbolį tai galime užrašyti taip:

$$\left(\frac{1}{7}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{7}\right) = 1, \quad \left(\frac{4}{7}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{3}{7}\right) = -1, \quad \left(\frac{5}{7}\right) = -1, \quad \left(\frac{6}{7}\right) = -1.$$
$$\left(\frac{0}{7}\right) = 0.$$

△

Kvadratinių liekanų struktūra

Įrodysime keletą teiginių, kurie padės labiau suprasti kvadratinių liekanų struktūrą.

Teiginys. *Tegu g - liekanų grupės moduliu p generatorius. Tuomet visos kvadratinės liekanos bus užrašomos kaip lyginiai g laipsniai, o nekvadratinės liekanos - kaip nelyginiai.*

Įrodymas. Pastebėkime, kad pats generatorius nėra kvadratinė liekana. Išties, jei $g \equiv t^2 \pmod{p}$, tai $g^{(p-1)/2} \equiv t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ - prieštara. Lyginiai generatoriaus laipsniai bus kvadratinės liekanos, nes $g^{2k} \equiv (g^k)^2 \pmod{p}$, o nelyginiai nebus, nes iš $g^{2k+1} \equiv t^2 \pmod{p}$ sektų $g \equiv (tg^{-k})^2 \pmod{p}$, kas reikštų, kad generatorius g yra kvadratinė liekana. □

Taigi galime naudotis tam tikra prasme analogišku sveikiesiems skaičiams „kvadratiškumo" kriterijumi - liekana yra kvadratinė tada ir tik tada, kai ji yra lyginis generatoriaus laipsnis. Iš to seka, kad dviejų kvadratinių arba dviejų nekvadratinių liekanų sandauga yra kvadratinė liekana, o vienos kvadratinės ir vienos nekvadratinės - nekvadratinė. Tai galime užrašyti kaip:

Teiginys. $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

Pastebėkime, kad ši lygybė galioja ir tuo atvėju, kai a ar b dalijasi iš p. Trečiasis teiginys leidžia nustatyti, ar liekana kvadratinė, ar ne, pažiūrėjus į jos $(p-1)/2$ laipsnį:

Teiginys. $a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)$ $(mod\ p)$.

Įrodymas. Jei a yra kvadratinė liekana, tai $a \equiv t^2 \pmod p$ ir

$$a^{(p-1)/2} \equiv t^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Jei a nėra kvadratinė liekana tai ji yra nelyginis generatoriaus laipsnis, t.y. $a \equiv g^N$, tačiau tuomet

$$a^{(p-1)/2} \equiv g^{N(p-1)/2} \equiv g^{(p-1)/2} \not\equiv 1 \pmod p.$$

Kadangi šiuo atveju $a^{(p-1)/2}$ nelygsta vienam, o jos kvadratas lygsta vienam, tai $a^{(p-1)/2}$ lygsta -1. □

Iš šio teiginio seka labai svarbi ir naudinga išvada:

Išvada. -1 *yra kvadratinė liekana moduliu* p *tada ir tik tada, kai* $p \equiv 1$ $(mod\ 4)$, *t.y.*

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Įrodymas. Užtenka įstatyti $a = -1$ į praeito teiginio lygybę. □

Kvadratinio apverčiamumo teorema

Įrodysime centrinę šio skyrelio teoremą. Ji pati yra labai naudinga sprendžiant uždavinius, tačiau įrodymas yra ilgokas, tad nesikrimskite, jei nepavyks jo iš karto įveikti.

Teorema (Kvadratinio apverčiamumo teorema)**.** *Tegu* p *ir* q *- nelyginiai pirminiai skaičiai. Tuomet*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Įrodymas. Paimkime bet kokią liekaną a moduliu p ir dauginkime ją iš $i = 1, 2, \ldots, (p-1)/2$. Kiekvienai sandaugai užrašykime lygybę

$$a \cdot i = p \cdot q_i + r_i$$

taip, kad liekana r_i būtų tarp $-(p-1)/2$ ir $(p-1)/2$, o ne tarp 1 ir $p-1$ kaip įprasta. Neigiamų liekanų skaičių pažymėkime μ_a ir sudauginkime lygybes moduliu p. Gausime

$$a^{(p-1)/2} \prod_{i=1}^{(p-1)/2} i \equiv (-1)^{\mu_a} \prod_{i=1}^{(p-1)/2} |r_i| \pmod p.$$

Pastebėkime, kad jokių dviejų liekanų moduliai negali būti vienodi, nes gautume

$$r_i = \pm r_j \Rightarrow a \cdot i \equiv \pm a \cdot j \pmod p \Rightarrow p | a(i \pm j),$$

ko negali būti, nes a iš p nesidalija, ir $-p < i \pm j < p$. Kadangi liekanos $|r_i|$ yra skirtingos ir tarp 1 ir $(p-1)/2$, tai jos tegali būti lygios $1, \ldots, (p-1)/2$, iš ko seka, kad $\prod_{i=1}^{(p-1)/2} i = \prod_{i=1}^{(p-1)/2} |r_i|$. Tuomet, suprastinę lygybę, gauname

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{\mu_a} \pmod p,$$

arba, įstatę $a = q$,

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\mu_q} \pmod p.$$

Norėdami rasti, ar μ_q yra lyginis, ar nelyginis, pradžioje užrašytas lygybes perrašykime moduliu 2. Vietoje

$$q \cdot i = p \cdot q_i + r_i$$

gausime

$$i \equiv q_i + |r_i| \pmod 2,$$

nes p, q nelyginiai ir $r_i \equiv -r_i \pmod 2$. Dalmuo q_i, jei liekana r_i buvo teigiama, yra lygus $\lfloor \frac{qi}{p} \rfloor$, o jei liekana buvo neigiama - $\lfloor \frac{qi}{p} \rfloor + 1$. Tad susumavę visas lygybes gausime

$$\sum_{i=1}^{(p-1)/2} i \equiv \mu + \sum_{i=1}^{(p-1)/2} \lfloor \frac{qi}{p} \rfloor + \sum_{i=1}^{(p-1)/2} |r_i| \pmod 2.$$

Samprotaudami kaip ir praeitą kartą gauname, kad

$$\sum_{i=1}^{(p-1)/2} i = \sum_{i=1}^{(p-1)/2} |r_i|,$$

todėl suprastinę randame

$$\mu_q \equiv \sum_{i=1}^{(p-1)/2} \lfloor \frac{qi}{p} \rfloor \pmod 2,$$

ir tuomet

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\sum_{i=1}^{(p-1)/2} \lfloor \frac{qi}{p} \rfloor}.$$

Analogiškai, kadangi q taip pat yra pirminis, gausime

$$\left(\frac{p}{q}\right) \equiv (-1)^{\sum_{i=1}^{(q-1)/2} \lfloor \frac{pi}{q} \rfloor}.$$

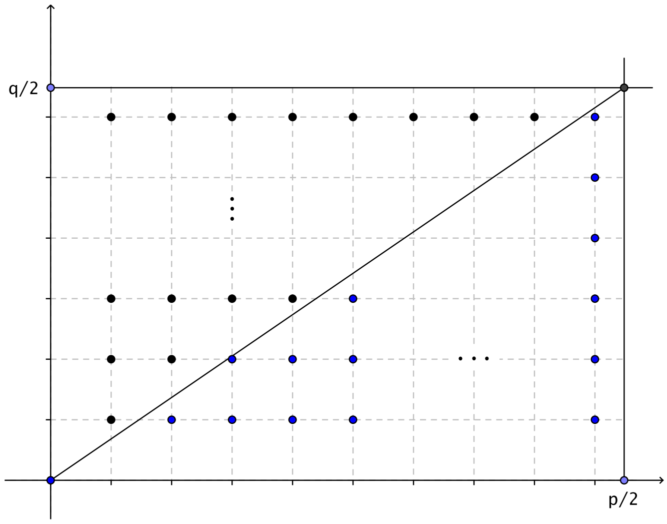
Sudauginkime išraiškas:

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) \equiv (-1)^{\sum_{i=1}^{(p-1)/2} \lfloor \frac{qi}{p} \rfloor + \sum_{i=1}^{(q-1)/2} \lfloor \frac{pi}{q} \rfloor}.$$

Lieka įrodyti, kad

$$\sum_{i=1}^{(p-1)/2} \lfloor \frac{qi}{p} \rfloor + \sum_{i=1}^{(q-1)/2} \lfloor \frac{pi}{q} \rfloor = \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}.$$

Tuo įsitikinti nesunku - pirmoji suma atitinka sveikuosius stačiakampio taškus (žr. brėžinį), esančius po tiese $y = \frac{q}{p}x$, o antroji atitinka sveikuosius stačiakampio taškus esančius virš tiesės.



□

Kvadratinio apverčiamumo teorema galioja tik nelyginiams pirminiams. Dvejetą reikia nagrinėti atskirai:

Teorema. *Liekana* 2 *yra kvadratinė moduliu* p *tada ir tik tada, kai* $p \equiv \pm 1$ $(mod\ 8)$, *t.y.* $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Įrodymas. Pasinaudosime kvadratinio apverčiamumo teoremos įrodymo metu gauta lygybe (dar vadinama Gauss lema) atveju $a = 2$:

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv (-1)^{\mu_2} \pmod{p}.$$

Pasirodo, šiuo atveju galima suskaičiuoti tikslią μ_2 reikšmę, priklausomai nuo pirminio p dalybos iš 8 liekanos. Nagrinėkime 4 atvejus:

$p = 8k+1$ - Šiuo atveju bus iš viso $4k$ liekanų, padauginus jas iš dviejų, $2k$ bus nedidesnės nei $4k$ ir $2k$ bus didesnės. Vadinasi, μ bus lygus $2k$ ir $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

$p = 8k+3$ - Šiuo atveju bus iš viso $4k+1$ liekana, padauginus jas iš dviejų, $2k$ bus nedidesnės nei $4k+1$ ir $2k+1$ bus didesnės. Vadinasi μ bus lygus $2k+1$ ir $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

$p = 8k+5$ - Šiuo atveju bus iš viso $4k+2$ liekanos, padauginus jas iš dviejų, $2k+1$ bus ne didesnės nei $4k+2$, ir $2k+1$ bus didesnės. Vadinasi, μ bus lygus $2k+1$ ir $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

$p = 8k+7$ - Šiuo atveju bus iš viso $4k+3$ liekanos, padauginus jas iš dviejų, $2k+1$ bus ne didesnės nei $4k+3$ ir $2k+2$ bus didesnės. Vadinasi, μ bus lygus $2k+2$ ir $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

□

Kvadratinio apverčiamumo teorema taip vadinasi ne be reikalo. Jos dėka užuot skaičiavus $\left(\frac{p}{q}\right)$, galima skaičiuoti $\left(\frac{q}{p}\right)$. Geriau įsižiūrėjus į teoremos formuluotę pasidaro aišku, kad šių dviejų Ležandro simbolių reikšmės sutaps, jei bent vienas iš p, q duos dalybos liekaną 1 moduliu 4, ir bus skirtingos, jei abiejų pirminių dalybos liekanos moduliu 4 bus lygios 3. Pažiūrėkime, kaip tai atrodo praktiškai.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. *Raskite, ar* 23 *yra kvadratinė liekana moduliu* 37*.*

Sprendimas. Abu duoti skaičiai yra nelyginiai pirminiai, todėl galime taikyti kvadratinio apverčiamumo teoremą. Kadangi $37 \equiv 1 \pmod 4$, tai gausime

$$\left(\frac{23}{37}\right)\left(\frac{37}{23}\right) = 1 \implies \left(\frac{23}{37}\right) = \left(\frac{37}{23}\right).$$

Pagrindinė nauda, kurią gauname iš apvertimo, yra ta, kad dabar skaitiklis yra didesnis už vardiklį, tad galime jį redukuoti moduliu. Kadangi $37 \equiv 14 \pmod{23}$, tai gausime

$$\left(\frac{37}{23}\right) = \left(\frac{14}{23}\right).$$

Redukavę, pritaikome lygybę $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$:

$$\left(\frac{14}{23}\right) = \left(\frac{2}{23}\right)\left(\frac{7}{23}\right).$$

Pirmąjį iš dauginamųjų galime iš karto suskaičiuoti. Kadangi $23 \equiv -1 \pmod 8$, tai $\left(\frac{2}{23}\right) = 1$. Antrąjį vėl apversime (šį kartą gausime, kad apverstasis yra priešingo ženklo, nes $7 \equiv 23 \equiv 3 \pmod 4$):

$$\left(\frac{7}{23}\right) = -\left(\frac{23}{7}\right) = -\left(\frac{2}{7}\right).$$

Kadangi $7 \equiv -1 \pmod 8$, tai gauname, kad $\left(\frac{2}{7}\right) = 1$, vadinasi, viską sujungę gausime $\left(\frac{23}{37}\right) = -1$, t.y. 23 nėra kvadratinė liekana moduliu 37. △

Pavyzdys 2. *Raskite, ar* 41 *yra kvadratinė liekana moduliu* 61*.*

Sprendimas. Darysime tą patį, ką ir praeitame pavyzdyje:

$$\left(\frac{41}{61}\right) = \left(\frac{61}{41}\right) = \left(\frac{20}{41}\right) = \left(\frac{2}{41}\right)^2\left(\frac{5}{41}\right) = \left(\frac{41}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1.$$

△

Pavyzdys 3. *Raskite, moduliu kurių pirminių,* 3 *yra kvadratinė liekana.*

Sprendimas. Ieškosime, kada $\left(\frac{3}{p}\right)$ yra lygus vienetui. Taikysime kvadratinio apverčiamumo teoremą. Kadangi $3 \equiv 3 \pmod 4$, tai

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p}{3}\right).$$

Sandauga bus lygi 1, kai abu daugikliai lygus 1 arba -1. Kadangi $\left(\frac{p}{3}\right)$ lygus 1, kai $p \equiv 1 \pmod 3$ ir -1, kai $p \equiv 2 \pmod 3$, tai gausime, kad mums tinka pirminiai skaičiai, tenkinantys sistemas:

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 4 \\ p \equiv 1 \pmod 3 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} p \equiv -1 \pmod 4 \\ p \equiv -1 \pmod 3 \end{cases}$$

Tokiais bus pirminiai $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$. △

Pavyzdys 4. *Kokie pirminiai skaičiai gali būti daugianario $x^2 + 5$ dalikliais? (Skaičių vadiname daugianario $q(x)$ dalikliu, jei su kuria nors x reikšme $q(x)$ iš jo dalijasi.)*

Sprendimas. Jei p yra daugianario $x^2 + 5$, tai su kažkokia x reikšme bus tesinga lygybė

$$x^2 + 5 \equiv 0 \pmod p \iff x^2 \equiv -5 \pmod p,$$

t.y. -5 turės būti kvadratinė liekana moduliu p. Tarę, kad $p \neq 5$, skaičiuojame:

$$\left(\frac{-5}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{5}\right).$$

Sandauga bus lygi 1, jei $p \equiv 1 \pmod 4$ ir $p \equiv \pm 1 \pmod 5$, arba jei $p \equiv -1 \pmod 4$ ir $p \equiv \pm 2 \pmod 5$. Išsprendę lyginių sistemas, randame, kad tiks $p \equiv 1 \pmod{20}$, $p \equiv 3 \pmod{20}$, $p \equiv 7 \pmod{20}$, $p \equiv 9 \pmod{20}$ bei atskiras atvejis $p = 5$. △

Uždaviniai

1. Raskite $\left(\frac{79}{101}\right)$. *S*
2. Įrodykite, kad jei pirminis $p > 3$ dalo skaičių $a^2 + 12$, tai tuomet $p \equiv 2 \pmod 3$. *S*
3. Įrodykite, kad iš visų nelygių nuliui liekanų moduliu pirminio p, pusė yra kvadratinės ir pusė nekvadratinės. *S*
4. Nustatykite, moduliu kurių pirminių, 6 yra kvadratinė liekana. *S*
5. [LitMo 1987]Skaičius N lygus pirmųjų $n \geqslant 2$ pirminių skaičių sandaugai. Įrodykite, kad nei vienas iš skaičių $N - 1$ ir $N + 1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas. *S*
6. Įrodykite, kad, kaip ir įprastai, kvadratinė lygtis $ax^2+bx+c \pmod p, a \not\equiv 0, p \neq 2$ turės sprendinių tada ir tik tada, kai diskriminantas b^2-4ac bus kvadratinė liekana (įskaitant nulį) moduliu p. *S*
7. [Brazil 2003] Raskite mažiausią pirminį, kuris dalo daugianarį $n^2 + 5n + 23$. *S*

8. Įrodykite, kad jei pirminis $p \equiv 3 \pmod 4$, tai iš $p|a^2+b^2$ seka $p^2|a^2+b^2$. *S*

9. Tegu pirminis $p = 4n+1$. Įrodykite, kad visi n dalikliai yra kvadratinės liekanos moduliu p. *S*

10. Įrodykite, kad kvadratinių liekanų sandauga lygsta 1 moduliu p, kai $p \equiv 3 \pmod 4$, ir -1, kai $p \equiv 1 \pmod 4$. *S*

11. Įrodykite, kad $1^2 3^2 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p$. *S*

12. Pasinaudoję lygybe $x^4+4 = ((x+1)^2+1)((x-1)^2+1)$ parodykite, kad -4 bus *bikvadratinė* liekana mod p tada ir tik tada, kai $p \equiv 1$ mod 4. (a yra bikvadratinė liekana, jei egzistuoja sprendinys $x^4 \equiv a$ mod p) *S*

13. Įrodykite, kad pirminiai daugianario $x^4 - x^2 + 1$ dalikliai lygsta 1 mod 12. *S*

14. Įrodykite, kad visi pirminiai yra daugianario $x^6 - 11x^4 + 36x^2 - 36$ dalikliai. *S*

15. Tegu pirminis $p \equiv 3$ mod 4, ir $q = 2p+1$ taip pat pirminis. Įrodykite, kad $q|2^p - 1$. *S*

16. Žinoma, kad jei pirminis $p \equiv 1$ mod 4, tai jis užrašomas kaip dviejų kvadratų suma $p = a^2 + b^2$. Tegu a - nelyginis dėmuo. Įrodykite: *S*
a) $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$;
b) $\left(\frac{a+b}{p}\right) = (-1)^{\frac{(a+b)^2-1}{8}}$;
c) $(a+b)^2 \equiv 2ab \pmod p$;
d) $(a+b)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (2ab)^{\frac{p-1}{4}} \pmod p$.
Tegu f toks, kad $b \equiv af \pmod p$. Įrodykite, kad $f^2 \equiv -1$ mod p ir kad $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{ab/2} \pmod p$.

Įrodykite, kad 2 yra bikvadratinė liekana moduliu p tada ir tik tada, kai p užrašomas kaip $A^2 + 64B^2$.

17. [JBMO 2007] Įrodykite, kad jei p yra pirminis, tai $A = 7p + 3^p - 4$ nėra pilnas kvadratas. *S*

18. [Kazakhstan 2004] Raskite visus pirminius p, su kuriais lygtis $x^2+y^2 = 2003+pz$ turi sveikųjų sprendinių. *S*

19. [Vietnam 2004] Tegu $S(n)$ skaičiaus n skaitmenų suma. Raskite mažiausią galimą $S(m)$ reikšmę, jei m dalijasi iš 2003. *S*

1.7 Diofantinės lygtys

Lygtys yra vadinamos diofantinėmis, kai yra ieškoma jų sveikųjų sprendinių. Šiame skyrelyje apžvelgsime keletą metodų padedančiu jas spręsti. Atkreipsime dėmesį, kad, skirtingai nuo įprastų lygčių, 'spręsti' dažniausiai yra bandyti įrodyti, kad lygtis sprendinių neturi, arba jei ir turi, tai labai specifinius.

1.7.1 Dvi lygties pusės

Pradėsime nuo trijų pagrindinių principų, besiremiančių labai bendru pastebėjimu:

Lygybės abi pusės yra vienodo dydžio, vienodai skaidomos dauginamaisiais ir duoda vienodas liekanas dalijamos iš natūraliųjų skaičių.

Dydis

Pradėkime nuo pavyzdžių. Išspręsime tris paprastas lygtis.

Pavyzdys. *Raskite lygties $x^2 = x + 2$ sveikuosius sprendinius.*

Sprendimas. Ši lygtis yra kvadratinė, ir ją galima išspręsti įprastai, tačiau minutėlei tą pamirškime ir pabandykime pasinaudoti tuo, kad kairioji pusė beveik visada yra didesnė už dešiniąją. Įvertinkime - kai $x \geqslant 3$, tai $x^2 \geqslant 3x \geqslant x + 6 > x + 2$, o kai $x \leqslant -2$, tai $x^2 > 0 \geqslant x + 2$, tad vienintėliai sveikieji skaičiai, kurių negalėjome atmesti samprotaudami apie skirtingus lygties pusių dydžius, yra $-1, 0, 1$ ir 2. Lieka tik patikrinti, kurie iš jų tinka, ir rasti, kad lygties sprendiniai yra -1 ir 2. △

Pavyzdys. *Raskite lygties $x^2 + y^2 = 100$ sveikuosius sprendinius.*

Sprendimas. Sveikųjų skaičių kvadratai yra visuomet neneigiami ir auga palyginti sparčiai. Šios lygties atveju, kaip tik tuo ir pasinaudosime - jei x arba y yra moduliu didesni už 10, tai kairioji pusė tampa didesnė už 100. Atkreipę dėmesį į tai, kad jei (x, y) yra sprendinys tai ir $(\pm x, \pm y)$ yra sprendinys gauname, kad užtenka patikrinti x reikšmes nuo 0 iki 10. Tai padaryti nesunku - randame, kad sprendiniai bus $(0, 10)$, $(6, 8)$, $(8, 6)$, $(10, 0)$ su visomis skirtingomis ženklų kombinacijomis. △

Pavyzdys. *Raskite lygties $xy = x + y$ sveikuosius sprendinius.*

Sprendimas. Dviejų sveikųjų skaičių sandauga beveik visada yra didesnė už sumą. Pasinaudosime tuo, tačiau pirmiausia atmeskime neigiamus atvejus. Aišku, kad abu ir x, ir y, negali būti neigiami, nes tuomet sandauga bus teigiama, o suma neigiama. Negali būti ir vienas neigiamas, vienas teigiamas, pvz. $x > 0$, $y < 0$, nes tuomet $xy \leqslant y < y+x$. Tad ieškokime sprendinių, kuriuose $x \geqslant 0$ ir $y \geqslant 0$ ir taip pat neprarasdami bendrumo tarkime, kad y yra nemažesnis nei x. Parodysime, kad x negali būti didesnis už 2. Iš ties, jei $x \geqslant 3$, tai $xy \geqslant 3y > y+x$. Vadinasi x gali įgyti tik reikšmes 0, 1 ir 2. Patikrinę randame sprendinius $(0, 0)$ ir $(2, 2)$. △

Bandant įvertinti reiškinių dydžius, natūraliai praverčia algebrinės nelygybės ir supratimas apie funkcijų didėjimą, argumentui artėjant į begalybę (pavyzdžiui, didesnio laipsnio daugianaris nuo kažkurios reikšmės visuomet įgis didesnes reikšmes už mažesnio laipsnio daugianarį). Puiki ir paprasta šių idėjų iliustracija - 1988 metų Lietuvos matematikos olimpiados uždavinys:

Pavyzdys. [LitMo 1988] *Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį* $3x^2+2y^2 = 4xy+2x$.

Sprendimas. Parodysime, kad kairioji pusė beveik visada yra didesnė už dešiniąją. Iš ties - pagal aritmetinio-geometrinio vidurkio nelygybę $2x^2 + 2y^2 \geqslant 4xy$, ir $x^2 > 2x$, kai $x > 2$. Vadinasi, lieka patikrinti tik dvi reikšmes - $x = 1$ ir $x = 2$. Tinka tik antroji, randame sprendinį $(2, 2)$. △

Dažniausiai, kaip ir turi būti olimpiadiniuose uždaviniuose, lygybės pusių dydžių skirtumo idėja būna užmaskuota ir reikia akylumo norint ją įžiūrėti. Pavyzdžiui:

Pavyzdys. [LitKo 2009] *Raskite lygties* $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16$ *sveikuosius neneigiamus sprendinius.*

Sprendimas. Šis uždavinys organizatoriams greičiausiai pasirodė kiek sunkokas, todėl olimpiadoje buvo suformuluotas kaip dviejų dalių, pirmoji iš kurių prašė įrodyti, kad visi sprendiniai tenkina nelygybę $|a - 3b| \geqslant 1$. Įrodyti tai labai paprasta, tačiau įžiūrėti užuominą gerokai sunkiau. Paprasčiausia tai padaryti turbūt būtų išskaidant pirmąjį dėmenį dauginamaisiais: $(a^2 - 9b^2)^2 = (a - 3b)^2(a + 3b)^2$, tuomet

$$(a - 3b)^2(a + 3b)^2 \geqslant (a + 3b)^2 \geqslant 9b^2.$$

Vadinasi, kairioji lygties pusė yra ne mažesnė nei $9b^2 - 33b = (9b - 33)b$, bet šio reiškinio reikšmė yra didesnė už 16 su visomis b reikšmėmis viršijančiomis 4, vadinasi lieka patikrinti vos keletą reikšmių.

Tačiau atidėkime šį sprendimą į šalį ir dar kartą pažvelkime į lygtį, bandydami kiek kitaip įvertinti kairiosios pusės dydį. Priežastis, dėl kurios $(a^2 - 9b^2)^2$ yra beveik visada daug didesnis už $33b$ yra ta, kad skirtumas tarp kvadratų yra pakankamai didelis. Išties, jei a^2 nėra lygus $9b^2$, tai arčiausiai (tuomet skirtumas mažiausias) jis gali būti tik tuomet, kai yra artimiausiai esantis kvadratas. O artimiausias kvadratas yra $(3b - 1)^2$, bet net tuomet skirtumas visvien yra $6b - 1$, o $(6b - 1)^2 - 33b$ yra didesnis už 16 su visomis b reikšmėmis didesnėmis už 1! Lieka vos du atvejai, iš kurių gauname po sprendinį: $(4, 0)$ ir $(4, 1)$. △

Viena (labai svarbi!) iš samprotavimo apie dydį variacijų -„įterpimo tarp kvadratų' triukas. Norint parodyti, kad sveikasis skaičius nėra kvadratas, užtenka parodyti, kad jis yra tarp dviejų gretimų kvadratų ir nė vienam iš jų nelygus. Ši strategija tinka, žinoma, ir aukštesniems laipsniams.

Pavyzdys. *Raskite lygties* $y^2 = x^2 + x + 1$ *sveikuosius sprendinius.*

Sprendimas. Kairioji lygties pusė yra kvadratas, o dešinioji beveik visada nėra, nes $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$ (arba $(x + 1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$, jei x neigiamas). Vienintelės x reikšmės, su kuriomis šios nelygybės nėra teisingos yra $x = -1$ ir $x = 0$, gauname sprendinius $(-1, \pm 1)$ ir $(0, \pm 1)$. △

Liekanos

Nagrinėjant lygtį moduliu pasirinkto skaičiaus, apribojimą, kad abi lygybės pusės turi duoti vienodą liekaną moduliu to skaičiaus, dažnai galima perkelti į apribojimą ieškomiems sprendiniams. Kartais tas apribojimas būna pakankamas, kad galėtume visiškai išspręsti lygtį, bet dažniau jis tampa pagalbine informacija, kuri tampa naudinga sujungus ją su kitomis idėjomis. Pradėkime nuo paprasčiausių atvejų, kai nagrinėjant lygtį moduliu tinkamai parinkto skaičiaus ji išsisprendžiama iki galo.

Pavyzdys. *Raskite lygties $x^2 = 3y - 1$ sveikuosius sprendinius.*

Sprendimas. Nagrinėkime šią lygtį moduliu 3. Norint, kad (x, y) būtų sprendinys, abiejų lygybės pusių dalybos liekana iš 3 turi būti vienoda. Dešinės pusės dalybos liekana bus -1, o kairės, priklausomai nuo x, arba 0, arba 1. Gavome, kad su jokiais (x, y) jos nesutaps, todėl lygtis sprendinių neturi. △

Pavyzdys. *Raskite lygties $x^2 = 2^n - 1$ sveikuosius sprendinius.*

Sprendimas. Nagrinėkime lygtį moduliu 4. Dešinė pusė, kad $n > 1$, lygsta -1 moduliu 4, o kairė 0 arba 1. Kadangi liekanos nesutampa, tai lieka tik atvejai $n \leqslant 1$, kuriuos patikrinę (n negali būti neigiamas, nes tuomet 2^n nebūtų sveikasis) randame sprendinius $n = 1, x = \pm 1$ ir $n = 0, x = 0$. △

Pavyzdys. *Raskite lygties $2 + x^2 + x^3 = 6^n$ sveikuosius sprendinius*

Sprendimas. Nagrinėkime lygtį moduliu 3 arba moduliu 5, arba moduliu 7. Visais trimis atvejais lengva įsitikinti, kad abi pusės duoda skirtingas liekanas. △

Kaip jau užsiminėme, lygties nagrinėjimas moduliu (arba sprendimas moduliu) dažniausiai yra tik dalis sprendimo. Pavyzdžiui:

Pavyzdys. [Lietuvos TST 2009] *Raskite lygties $x^3 + x^2 = 16 + 2^y$ natūraliuosius sprendinius.*

Sprendimas. Nagrinėkime lygtį moduliu 7. Kairioji pusė gali įgyti liekanas $0, 1, 2, 3, 5$, o dešinioji $3, 4$ ir 6. Vienintėlė bendra liekana yra 3, ir ji įgyjama kai y dalijasi iš 3. Panaudokime gautą informaciją - pažymėkime $y = 3a$ ir perrašykime lygtį kaip

$$(2^a)^3 = x^3 + x^2 - 16.$$

Lieka pastebėti, kad galime pritaikyti įterpimo tarp kubų įdėją: su visais $x > 4$ turime

$$x^3 < x^3 + x^2 - 16 < (x + 1)^3,$$

vadinasi, lieka patikrinti tik keturias x reikšmes. Randame vienintelį sprendinį $(4, 6)$. △

Pavyzdys. [MEMO 2009, Aivaras Novikas] *Raskite lygties $2^x + 2009 = 3^y 5^z$ neneigiamus sveikuosius sprendinius.*

Sprendimas. Pirmiausia įsitikinkime, kad x negali būti mažesnis už 3. Išties - įstačius reikšmes $0, 1, 2$ kairiojoje pusėje gauname $2010, 2011, 2013$ ir nė vienas iš šių skaičių neišsiskaido tik į trejeto ir penketo laipsnius. Tad tarkime, kad $x \geqslant 3$. Įrodysime, kad visi trys x, y, z turi būti lyginiai.

- x - Jei $y > 0$, tai nagrinėkime lygtį moduliu 3 gausime $(-1)^x - 1 \equiv 0$, vadinasi x lyginis. Jei $y = 0$, tai $z > 0$, tuomet nagrinėkime lygtį moduliu 5. Gausime $2^x - 1 \equiv 0$, vadinasi x dalijasi iš 4, t.y. yra lyginis.
- y - nagrinėkime lygtį moduliu 4. Kadangi $x > 2$, tai gausime $1 \equiv (-1)^y$, vadinasi y lyginis.
- z - nagrinėkime lygtį moduliu 8. Kadangi $x > 2$ ir y lyginis, tai gausime $1 \equiv 5^z$, vadinasi z lyginis.

Pažymėję $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$ galime lygtį pertvarkyti į

$$2009 = (3^b 5^c - 2^a)(3^b 5^c + 2^a).$$

Kadangi 2009 išsiskaido kaip $7^2 \cdot 41$, tai į dviejų dauginamųjų sandaugą galime jį išskaidyti tik trim būdais: $1 \cdot 2009$, $7 \cdot 287$ ir $41 \cdot 49$. Vienintelis išskaidymas, kurio dauginamieji skiriasi per dvejeto laipsnį yra $41 \cdot 49$, iš kur randame vienintėlį sprendinį $(4, 4, 2)$. △

Lygties sprendimą moduliu visuomet verta prisiminti sprendžiant diofantines lygtis ir ypač tas, kuriose iš pirmo žvilgsnio nesimato jokių silpnų vietų. Neretai verta spręsti lygtį moduliu nedidelių skaičių (pvz. $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$) ir akylai stebėti gaunamą informaciją. Taip pat visuomet verta gerai įsižiūrėti į lygtį, kartais koeficientai ar dideli laipsniai gali pasufleruoti skaičių, moduliu kurio pavyks išpešti ką nors vertingo.

Pastebėsime, kad sprendimas moduliu dažnai būna sėkmingas, jei viena arba abi lygties pusės įgyja nedaug liekanų moduliu nagrinėjamo skaičiaus. Kiek liekanų įgyja reiškiniai pavidalo x^k (kur x kintamasis) kartais padeda įvertinti liekanų grupių teorija. Prisiminkime, kad liekanų grupės moduliu pirminio p eilė yra $p-1$, o moduliu sudėtinio n yra $\varphi(n)$. Jei $p-1$ (ar $\varphi(n)$) ir k didžiausias bendras daliklis yra didelis, tai tuomet x^k įgis nedaug reikšmių moduliu p (ar n). Konkrečiau:

- $p = 3$ - liekanų grupės eilė 2 - x^2 (ir kiti lyginiai laipsniai) įgys 2 liekanas iš 3
- $n = 4$ - liekanų grupės eilė 2 - x^2 įgis 2 liekanas iš 4
- $p = 5$ - liekanų grupės eilė 4 - x^4 įgis 2 liekanas iš 5
- $p = 7$ - liekanų grupės eilė 6 - x^6 įgis 2, x^3 įgis 3 liekanas iš 7
- $n = 8$ - liekanų grupės eilė 4 - x^4 įgis 2, x^2 įgis 3 liekanas iš 8
- $n = 9$ - liekanų grupės eilė 6 - x^6 įgis 2, x^3 įgis 3 liekanas iš 9
- $p = 11$ - liekanų grupės eilė 10 - x^{10} įgis 2, x^5 įgis 3 liekanas iš 11

Žiūrint iš šio taško, 1998 metų Balkanų Matematikos Olimpiados uždavinys atrodo labai paprastas:

Pavyzdys. [BMO 1998] *Parodykite, kad lygtis $x^2 + 4 = y^5$ neturi sveikųjų sprendinių.*

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį į y^5. Šis reiškinys įgis nedaug reikšmių moduliu 11, o tiksliau, kadangi $y^{10} \equiv 0, 1 \pmod{11}$, tai $y^5 \equiv 0, -1, 1 \pmod{11}$. Tad spręskime lygtį moduliu 11 - x^2 įgys reikšmes $0, 1, 4, 9, 5, 3$, todėl kairioji pusė įgis reikšmes $4, 5, 8, 2, 9, 7$. Nei viena iš jų nėra lygi $0, 1$ ar -1, vaidinasi lygtis sprendinių neturi. △

Skaidymasis

Vėl pradžiai pateiksime porą paprastų pavyzdžių.

Pavyzdys. *Raskite visus sveikuosius lygties $xy = x + y$ sprendinius.*

Sprendimas. Vienas iš būtinų įgūdžių norint sėkmingai taikyti skaidymosi idėjas yra skaidymas dauginamaisiais. Pažvelkime į du skirtingus šios jau matytos lygties pertvarkymus: $(x - 1)(y - 1) = 1$ ir $x(y - 1) = y$. Pirmuoju atveju lygtis iš karto išspręsta - jei dviejų sveikųjų skaičių sandauga lygi 1, tai jie arba abu lygūs 1, arba -1. Antrasis išskaidymas yra iš pirmo žvilgsnio prastesnis, bet įdomesnis: kadangi $y - 1$ ir y yra tarpusavyje pirminiai, tai bet koks $y - 1$ daliklis dalins kairę lygybės pusę, bet nedalins dešinės. Vadinasi $y - 1$ negali turėti jokių daliklių, todėl yra lygus 1 arba -1. Gauname sprendinius $(0, 0)$ ir $(2, 2)$. △

Pavyzdys. *Raskite visus sveikuosius lygties $x^2 = 2^n + 1$ sprendinius.*

Sprendimas. Pastebėkime, kad jei (x, n) yra sprendinys, tai ir $(-x, n)$ bus sprendinys, tad ieškokime tik teigiamų x.

Išskaidykime dauginamaisiais: $(x - 1)(x + 1) = 2^n$. Dešinioji pusė yra dvejeto laipsnis, todėl kairiosios pusės abu dauginamieji taip pat turi būti dvejeto laipsniai. Tačiau vienintėliai dvejeto laipsniai, tarp kurių skirtumas yra du (o būtent toks skirtumas yra tarp daugiklių), yra 2 ir 4, vadinasi $x = 3$, $n = 3$.

Alternatyviai galima samprotauti taip: kadangi didžiausias $x - 1$ ir $x + 1$ bendras daliklis yra nedidesnis už 2, tai vienas iš dauginamųjų dalinsis daugiausia tik iš 2^1, vadinasi, bus lygus 2 arba 1, vadinasi x lygus $0, 1, 2$ arba 3. Iš jų tinka tik $x = 3$. △

Kaip jau buvo matyti praeitos dalies pavyzdyje iš MEMO 2009 olimpiados, ne visuomet iš karto pavyksta išskaidyti lygtį dauginamaisiais - kartais pirmiausia reikia gauti papildomos informacijos apie ieškomus sprendinius. Taip pat ne visuomet aišku, ką daryti išskaidžius. Bendros strategijos greičiausiai nėra, bet visuomet verta atkreipti dėmesį į dauginamųjų bendrus daliklius. Dažnai pastebėjus, kad jie jų neturi (arba jie labai riboti) galima pasistūmėti į priekį.

Pavyzdys. [IMO 2006] *Raskite lygties $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ sveikuosius sprendinius.*

Pirmiausia pastebėkime, kad x negali būti mažesnis už -1, nes tuomet kairė pusė nebus sveikasis skaičius. Patikrinę x reikšmes nuo -1 iki 2 randame vienintelį sprendinį $(0, \pm 2)$, tad tarkime, kad $x \geqslant 3$ ir $y > 0$ (iš sprendinio (x, y) gausime ir sprendinį $(x, -y)$).

Išskaidykime dauginamaisiais:

$$2^x(2^{x+1}+1) = (y-1)(y+1).$$

Kadangi dbd$(y-1, y+1) \leqslant 2$, o sandauga $(y-1)(y+1)$ dalijasi iš 2^x, tai bent vienas iš dauginamųjų dalinisis iš 2^{x-1}. Atkreipkite dėmesį, kad $y \pm 1$ negali būti daug kartų didesnis už 2^{x-1}, nes tuomet dešinėje pusė bus didesnė už kairiąją. Lieka viską tvarkingai pabaigti. Nagrinėkime du atvejus:

$2^{x-1}|y-1$ - pažymėję $y-1 = a2^{x-1}$ ir įstatę į lygtį gausime $2^x + 2^{2x+1} = a2^{x-1}(a2^{x-1}+2)$ arba $1 + 8 \cdot 2^{x-2} = a^2 2^{x-2} + a$. Aišku, kad $a < 3$, bet $a = 1$ ir $a = 2$ netinka.

$2^{x-1}|y+1$ - pažymėję $y+1 = a2^{x-1}$ ir įstatę į lygtį gausime $1 + 8 \cdot 2^{x-2} = a^2 2^{x-2} - a$. Aišku, kad $a < 4$, patikrinę mažesnes reikšmes randame, kad tinka $a = 3$, tuomet $x = 4$ ir $y = 23$.

Vadinasi, visi lygties sprendiniai yra $(0, \pm 2)$ ir $(4, \pm 23)$.

Pavyzdys. [BMO 2009] *Raskite lygties* $3^x - 5^y = z^2$ *sveikuosius teigiamus sprendinius.*

Sprendimas. Spręskime lygtį moduliu 4. Kairė pusė lygsta $(-1)^x - 1$, o dešinė 0 arba 1. Norint, kad jos būtų lygios x turi būti lyginis. Pažymėję $x = 2a$ gausime

$$-5^y = (z-3^a)(z+3^a).$$

Kadangi dbd$(z-3^a, z+3^a)|2 \cdot 3^a$, tai vienas iš dauginamųjų nesidalins iš 5, vadinasi, bus lygus ± 1. Tačiau $z + 3^a > 3$, todėl lieka vienintelis variantas $z - 3^a = -1$ - gauname lygtį

$$5^y = 2 \cdot 3^a - 1.$$

Pastebėkime, kad $a = 1, y = 1$ yra sprendinys. Jei $a > 1$, tai spręsdami moduliu 9 gausime $5^y \equiv -1$, todėl y dalijasi iš 3. Tačiau tuomet $5^y + 1$ dalinsis iš 7, o $2 \cdot 3^a$ nesidalins. Radome, kad lygtis turi vienintelį sprendinį $(2, 1, 2)$. $\triangle$

Retais atvejais pavyksta panaudoti elegantiškas idėjas apie kai kurių reiškinių pirminius daliklius. Pavyzdžiui, iš kvadratinių liekanų skyrelio žinome, kad $x^2 + a$ negali turėti pirminio daliklio, su kuriuo $\left(\frac{-a}{p}\right) = -1$, taip pat kaip ir dviejų kvadratų suma negali dalintis iš pirminio skaičiaus, lygstančio 3 moduliu 4, nelyginio laipsnio.

Pavyzdys. [IMO Longlist 1984] *Įrodykite, kad lygtis* $4mn - m - n = x^2$ *neturi sveikųjų sprendinių.*

Sprendimas. Išskaidykime dauginamaisiais:

$$(4m-1)(4n-1) = 4x^2 + 1.$$

Kairėje pusėje esantys dauginamieji lygsta 3 moduliu 4, vadinasi dalijasi bent iš vieno pirminio p, kuris irgi lygsta 3 moduliu 4. Tačiau dešinė pusė tokio pirminio daliklio turėti negali, nes tuomet $(2x)^2 \equiv -1 \pmod p$, ko negali būti, nes -1 yra kvadratinė liekana tik moduliu pirminių, kurie lygsta 1 moduliu 4. $\triangle$

Uždaviniai

1. Raskite lygties $x^2 = 200 + 9y$ sveikuosius sprendinius. *S*

2. Raskite lygties $x^2 = 100 + y^2$ sveikuosius sprendinius. *S*

3. Raskite lygties $x^2 + y^2 = 4z + 3$ sveikuosius sprendinius. *S*

4. Raskite lygties $x^2 + 2x = 4y + 2$ sveikuosius sprendinius. *S*

5. Raskite lygties $x^2 + y^2 = 2x + 3y + 4$ sveikuosius sprendinius. *S*

6. [LitMo 1987] Nurodykite natūraliųjų skaičių, didesnių už 100, trejetą (x, y, z), tenkinantį lygybę $x^2 + yz^2 - xy - xz^2 = 1987$. *S*

7. Raskite lygties $2^x = 3^y + 1$ sveikuosius sprendinius. *S*

8. Raskite lygties $2^x = 3^y - 1$ sveikuosius sprendinius. *S*

9. [LitMo 1988] Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį $x^2 + (x + y)^2 = (x + 9)^2$. *S*

10. [LitMo 1989] Išspręskite lygtį $x^{2y} = 2^z - 1$ natūraliaisiais skaičiais. *S*

11. [LitMo 1989] Išspręskite sveikaisiais skaičiais lygtį $2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 12 = 0$. *S*

12. [LitMo 1989] Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį $13x^2 + 17y^2 = 1989^2$. *S*

13. [IMO Longlist 1972] Raskite visus sveikuosius lygties $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^4$ sprendinius. *S*

14. [IMO Longlist 1977] Raskite visus sveikuosius lygties $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$ sprendinius. *S*

15. [LitMo 1986] Išspręskite lygtį $x^y = y^{x-y}$ natūraliaisiais skaičiais. *S*

16. [LitMo 1987] Išspręskite lygtį $6!x! = y!$ natūraliaisiais skaičiais. *S*

17. [LitKo 2007] Raskite visus sveikųjų skaičių x, y, z ir t ketvertus (x, y, z, t) tenkinančius lygtį $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3(x + y + z + t)$. *S*

18. Raskite visus natūraliuosius lygties $x^3 - y^3 = xy + 61$ sprendinius. *S*

19. [JBMO 2009] Raskite lygties $2^a3^b + 9 = c^2$ natūraliuosius sprendinius. *S*

20. Raskite lygties $3^x - 2^y = 1$ natūraliuosius sprendinius. *S*

21. Raskite lygties $x^2 + 3 = 12y^3 - 16y + 1$ sveikuosius sprendinius. *S*

2 SKYRIUS

ALGEBRA

2.1 Nelygybės

Šiame skyrelyje daugiausia to, ką veiksime su nelygybėmis, sudarys bandymai jas įrodyti. Nelygybių įrodinėjimas bus pagrindinė veikla, o jų įrodymas bus aukščiausia siekiamybė ir didžiausia vertybė. Skaitytojui, susipažinusiam tik su mokykliniu nelygybių kursu, tai gali atrodyti ne tik naujai, bet keistai ar baisiai. Nuo ko pradėti, norint įrodyti? Nelygybių įrodinėjimo filosofija remiasi vos keliais paprastais principais.

Bandydami įrodyti, naudosimės nelygybėmis-teoremomis, su kuriomis susipažinsime šiame skyriuje ir žinosime, kad jos tikrai tikrai galioja. Šios teoremos - tarsi laiptai, kuriais lipame iš kairės nelygybės pusės į dešinę. Jei turime įrodyti $A \geqslant B$, o pagal teoremą T, turime $A \geqslant B$, tai mes įrodėme nelygybę „vienu šuoliu", kas nebuvo labai įdomu. Tik nuo sprendėjo priklauso, kiek ir kokių „šuolių" reikės atlikti norint pasiekti rezultatą. Kadangi dažniausiai tenka lipti daugiau nei vienu laipteliu, reikėtų sužinoti, kaip tai daroma.

Tarkime, norime įrodyti $A \geqslant C$. Tegu, remiantis teorema X, tikrai tikrai galioja $A \geqslant B$. Jei pasistengę gausime, kad, anot teoremos Y, $B \geqslant C$, tai tada $A \geqslant C$, ką ir reikėjo įrodyti. Bet jeigu netyčia pagal teoremą Z tikrai galioja $B \leqslant C$, tai reikš ne tai, kad įrodoma nelygybė yra neteisinga, bet kad teoremos X „laiptelis" buvo per „status". Pagalvokite: jei iš taško A stipriai nusileidžiate į tašką B, bet pamatote, kad C - aukščiau už B, niekaip negalėsite pasakyti kuris iš A ir C yra aukščiau, nes nelygybės gali nurodyti tik, ar kažkas yra daugiau/mažiau už kažką, bet ne kiek stipriai. Kitaip tariant, žinome tik tiek, kad jei mes tik leidomės, tai esame žemiau, o jeigu tik kilome - tai aukščiau, na o jeigu kaip liftu važinėjomes tai aukštyn tai žemyn, tai jau niekas nebesupaisys, kokiame aukštyje esame. Tai yra pagrindinis nelygybių įrodinėjimo principas, tačiau yra kelios plačiai naudojamos jo formos.

Nelygybę visada galime ekvivalenčiai pertvarkyti (ekvivalenčiai reiškia, kad jei atlikome tam tikrus pertvarkymus ir iš nelygybės X gavome nelygybę Y, tai atlikdami logiškus atvirkščius pertvarkymus, iš Y galime vėl gauti X) ir tada naudoti/įrodinėti pertvarkytąją. Tie pertvarkymai gali būti labai įvairūs: prie abiejų nelygybės pusių galime pridėti po konstantą, padauginti iš jos, pakelti laipsniu, logaritmuoti ir antilogaritmuoti. Visada reikia būti atsargiems: kai kada ne visi šie veiksmai yra galimi. Taip pat prisiminkite, kad nelygybę dauginant iš neigiamos konstantos ar keliant neigiamu laipsniu, nelygybės ženklas apsiverčia, t.y.: iš $\geqslant$ virsta į $\leqslant$, o iš $>$ į $<$ ir atvirkščiai.

Dvi teisingas nelygybes galime visada sudėti, o jei jos abi teigiamos, ir sudauginti. Taigi, jei turime $A \geqslant C$ ir $B \geqslant D$, tai įrodėme $A + B \geqslant C + D$, o jei A, B, C ir D teigiami, tai ir $A \cdot B \geqslant C \cdot D$. Pastebėkime, kad nei dalinti, nei atimti nelygybių vienos iš kitos negalime. Netikintiems: imkime dvi teisingas nelygybes $8 \geqslant 4$ ir $8 \geqslant 3$. Nei atėmę, nei padalinę teisingos nelygybės negausime.

Lygybės atvejis yra viena subtiliausių negriežtų nelygybių dalių. Naudojant teoremas privalu stebėti, ar vis dar įmanoma pasiekti lygybę. Jei pasidaro neįmanoma, tai uždavinio išspręsti greičiausiai nepavyks. Kaip sužinoti lygybės atvejį? Dažniausiai reikia tiesiog atspėti, kas neretai yra gana paprasta. Atsižvelgimas į lygybės atvejį leis sutaupyti laiko ir aklai nenaudoti žūčiai pasmerktų strategijų. Lygybės atvejis naudojamas dar ir ekstremumų ieškojimui.

Ekstremumas - mažiausia arba didžiausia funkcijos reikšmė duotame intervale. Profesionalai ekstremumų ieškojimui naudoja išvestines ir Lagranžo daugiklius. Skaitytojus raginame susipažinti su šia įstabios galios technika, jei to padaryti dar nespėjote. Šiame skyriuje ekstremumų ieškojimui naudosime alternatyvų būdą - nelygybes. Ne paslaptis, kad remiantis klasikinėmis nelygybėmis, ciklinių ar simetrinių reiškinių nuo kelių kintamųjų ekstemumų ieškojimas yra daug paprastesnis ir, dažnai, greitesnis. Reiškinio minimumo ar maksimumo ieškojimas nelygybėmis remiasi dviem elementariais žingsniais:

1. Randame reiškinio maksimalią ar minimalią ribą, tai yra, už ką jis yra tikrai ne didesnis ar ne mažesnis. Pavyzdžiui, jei gautume, kad funkcija $F \geqslant C$, kur C - kokia tai konstanta, tai su jokiais funkcijos parametrais negalime gauti F reikšmės, mažesnės už C. Gali pasirodyti, kad tai reikštų, jog C yra vienas funkcijos ekstremumų - minimumas, bet taip nebūtinai yra, todėl privaloma žengti antrąjį žingsnį.

2. Radę galimą reikšmę, privalu patikrinti, ar ji pasiekiama. Ji bus įgyjama lygybės atveju, taigi, iš pritaikytų nelygybių lygybės atvejų turime atsekti, kokios turi būti kintamųjų reikšmės.

Jei antrojo žingsnio išpildyti nepavyksta, tai reiškia, kad pirmasis žingsnis atliktas neteisingai. Dažniausia klaida - panaudotų nelygybių lygybės atvejų praradimas, kai šie neegzistuoja arba netenkina reiškinio apibrėžimo srities. Na, o jeigu pavyko atlikti abu veiksmus, jūs sėkmingai radote funkcijos ekstremumą. Tokios užduoties atsakymas formuluojamas įvardijant ne tik rastą reikšmę, bet ir parametrų, su kuriais tai pasiekiama, reikšmes.

Nelygybės yra itin plati ir labai įvairi matematikos šaka. Šiame skyriuje supažindinsime su pagrindinėmis sprendimo technikomis, triukais. Neįmanoma mintinai išmokti visų nelygybių, tačiau galima išmokti suprasti pagrindines tendencijas ir greičiau surasti idėją, padėsiančią atlikti užduotį. Idėjoms įgyvendinti reikalingi įrankiai. Jais ir taps įvairios nelygybės-teoremos, metodai, pavyzdžių, uždavinių rezultatai. Tai padės išspręsti didžiąją dalį uždavinių, kurie pasirodys ne tik skyreliuose „Uždaviniai", bet ir olimpiadose. Nesitikime, kad skaitytojas pajėgs pats išspręsti visus pateiktus uždavinius, juk kai kurie jų - tikri algebros briliantai, tačiau pastangos nenueis perniek. Būkite drąsūs!

2.1.1 Pirmieji žingsniai

Beveik visos klasikinės nelygybės remiasi faktu, kad realaus skaičiaus kvadratas yra nemažesnis už nulį. Tačiau suvesti bet kokią nelygybę į kvadratų, padaugintų iš teigiamų skaičių, sumą dažniausiai būna mažų mažiausiai šlykštu. Todėl gausybė talentingų pasaulio matematikų per amžius sunkiai dirbo, kurdami vis įspūdingesnius ir galingesnius įrankius, kuriems paklūsta net pačios sudėtingiausios problemos. Šių įrankių veikimo principai reikalauja dėmesio, o jų supratimas leis juos naudoti itin efektyviai ir sumaniai. Šiame skyrelyje ir pradėsime nuo pačių pamatų: nagrinėsime, ką galime pasiekti iš tokio nekaltai atrodančio fakto kaip:

Teorema. *Jei $x \in \mathbb{R}$, tai $x^2 \geqslant 0$. Lygybė galios tada ir tik tada, kai $x = 0$.*

Kai kurios teoremos bus įrodytos, bet tik ne ši. Žinoma, tai labai svarbi nelygybė ir sunku įsivaizduoti nelygybę, kuri ja nesiremtų, bet įrodymas yra toks paprastas, kad žymiai daugiau prasmės yra švaistyti popierių ir laiką šnekant apie jos akivaizdumą negu iš tikrųjų ją įrodyti. Įrodymas remiasi tokiais gerai žinomais teiginiais kaip „Mano draugo draugas yra mano draugas” ir „Mano priešo priešas yra mano draugas”. Pravartu žinoti, kad „Mano daugo priešas yra mano priešas” ir „Mano priešo draugas yra mano priešas”, nors paskutinieji du nelygybės įrodyti ir nepadeda.

Kadangi pavyzdžiai kalba geriau už bet kokią nelygybių sprendimo ir įrodymo teoriją, tai ir judėkime prie jų.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. *Jei $0 \leqslant a, b \in \mathbb{R}$, tai:*

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Lygybė galios tada ir tik tada, kai $a = b$.

Įrodymas. Pertvarkykime nelygybę į (matematikų kalba šnekant, nelygybė yra ekvivalenti) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Iš akivaizdžios ankstesnės teoremos seka, kad gauta nelygybė yra teisinga. Štai kaip „vienu šuoliu” išsprendėme pirmąjį nelygybių skyriaus uždavinį. □

Dauguma šio skyrelio uždavinių, kaip ir pirmasis, bus paremti reiškinių pertvarkymais į kvadratų sumą. Be to, nepamiršime naudotis gautais uždavinių ir pavyzdžių rezultatais, kurie žymiai supaprastins sprendimus.

Pavyzdys 2. *Raskite $S = 2a^2 + 9c^2 + 5b^2 + 2ab - 8bc - 8ac - 2a + 4c + 2$ minimumą, kai $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Sprendimas. Pertvarkome reiškinį: $S = (a + b - 2c)^2 + (2c - a + 1)^2 + (2b - c)^2 + 1 \geqslant 1$. Spėjamas minimumas yra 1, belieka patikrinti, ar jis pasiekiamas. Tai atliekame spręsdami lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0; \\ 2c - a + 1 = 0; \\ 2b - c = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3; \\ b = -1; \\ c = -2. \end{cases}$$

Vadinasi, minimali S reikšmė lygi 1, ir ji gaunama, kai $a = -3$, $b = -1$, $c = -2$. △

Pastaba. Galima ir kitaip sugrupuoti duoto reškinio narius, tačiau tuomet gauta lygčių sistema neturės visų reikiamų sprendinių, arba šie bus netinkami.

Pavyzdys 3. *Įrodykite, kad su teigiamais realiaisiais skaičiais x ir y galioja nelygybė*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}.$$

Įrodymas. Padauginame nelygybę iš $xy(x+y)$. Gausime nelygybę $xy + y^2 + x^2 + xy \geqslant 4xy$, kuri yra ekvivalenti $(x-y)^2 \geqslant 0$, kas yra akivaizdu. □

Pastaba. Beveik visos miniatiūrinės dviejų kintamųjų nelygybės gali būti lengvai „nulaužtos” naudojant „brutalios jėgos” taktiką, ką mes ir padarėme paskutiniame nagrinėtame pavyzdyje. Žinoma, tokia taktika gali „nulaužti” ir daug masyvesnes kelių kintamųjų nelygybes, tačiau taip spręsti nėra taip malonu ir greita, kaip ieškant teisingo kokios nors teoremos pritaikymo būdo. Tai pamatysime kitame pavyzdyje:

Pavyzdys 4. *Tegu a, b, c bus teigiami realieji skaičiai. Įrodykite, kad*

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant a + b + c.$$

Įrodymas. Pagal nelygybę $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, gauname

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} \geqslant 2a.$$

Taip pat

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geqslant 2b,$$

ir

$$\frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant 2c.$$

Sudėję šias nelygybes gausime norimą rezultatą. □

Dažnai tenka įrodinėti griozdiškas nelygybes, kur daugybę kartų tenka perrašinėti ilgus ir vienus į kitus panašius reiškinius. Matematikai, būdami nepataisomi tinginiai yra sugalvoję keletą žymėjimų, kurie sumažina sugadinamo popieriaus kiekį ir padeda sistemingai pateikti reikiamą informaciją. Susipažinkime su ciklinėmis ir simetrinėmis sumomis bei sandaugomis:

Apibrėžimas. Tegu $A_0 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Tuomet

$$\sum_{cyc} f(A_0) = f(a_1, a_2, ..., a_n) + f(a_2, a_3, ..., a_n, a_1) +$$
$$+ f(a_3, a_4, ..., a_n, a_1, a_2) + ... + f(a_n, a_1, ..., a_{n-1}).$$

Taigi, ciklinė suma - tai suma, kur sumuojamos funkcijos argumentai yra perstumiami per vieną poziciją n kartų. Pavyzdžiui:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+a}{b} = \frac{a^2+a}{b} + \frac{b^2+b}{c} + \frac{c^2+c}{a};$$

$$\sum_{cyc} \frac{0 \cdot a + b^4}{c^3 - d} = \frac{b^4}{c^3-d} + \frac{c^4}{d^3-a} + \frac{d^4}{a^3-b} + \frac{a^4}{b^3-c}.$$

Apibrėžimas.
$$\sum_{sym} f(A_0) = f(A_1) + f(A_2) + ... + f(A_{n!}).$$

Čia A_i - visos aibės A_0 narių perstatos. Kadangi perstatų yra $n!$, tai tiek dėmenų ir gausime.

Kitaip sakant, simetrinė suma - tai funkcijų suma, kur funkcijų argumentai yra visos jų perstatos. Pavyzdžiui:

$$\sum_{sym} \frac{a^2+b}{c^3} = \frac{a^2+b}{c^3} + \frac{b^2+a}{c^3} + \frac{c^2+b}{a^3} + \frac{b^2+c}{a^3} + \frac{a^2+c}{b^3} + \frac{c^2+a}{b^3}.$$

Analogiškai apibrėžiamos ir sandaugos

$$\prod_{cyc} f(A_0) \qquad \text{bei} \qquad \prod_{sym} f(A_0).$$

Pavyzdys 5 (L.M.)**.** *Tegu a, b, c bus tokie realieji skaičiai, kad $abc = 1/2$. Įrodykite, kad*

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+b^2} \leqslant a+b+c.$$

Įrodymas. Pagal nelygybę $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ gauname $(a^2+b^2)^{-1} \leqslant (2ab)^{-1}$. Taigi

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+b^2} \leqslant \sum_{cyc} \frac{c}{2abc} = \frac{a+b+c}{2abc} = a+b+c.$$

□

Pavyzdys 6. *Tegu a, b, c - tokie teigiami skaičiai, kad $a^2+b^2+c^2 = 3$. Įrodykite nelygybę $a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) \leqslant 6$.*

Įrodymas. Kadangi $a^2+b^2+c^2 = 3$, duotoji nelygybė ekvivalenti

$$\begin{aligned}
&a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) \leqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 \\
&\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^4 + 4\sum_{cyc} a^2b^2 \geqslant 3\sum_{cyc} ab(a^2+b^2) \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4+b^4+4a^2b^2-3ab(a^2+b^2) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4+ab(a^2+b^2)-2ab\cdot ab \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^4 + \sum_{cyc} ab(a-b)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

kas yra akivaizdu. □

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad jei x, y yra teigiami realieji skaičiai, tai galioja $x^3+y^3 \geqslant xy(x+y)$. S

2. Įrodykite, kad visiems realiesiems a, b, c galioja nelygybė $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$. S

3. Įrodykite, kad visiems realiesiems a, b, c, d galioja nelygybė $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant ab+ac+ad$. Kada galios lygybė? S

4. Įrodykite, kad visiems realiesiems teigiamiems a, b, c galioja nelygybė $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$. S

5. Duoti realieji a, b, x, y, kur $x, y > 0$. Įrodykite, kad galioja $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}$. Kada galios lygybė? Kaip galėtume praplėsti (apibendrinti) šią nelygybę? S

6. Įrodykite, kad visiems teigiamiems realiesiems x, y galioja nelygybė $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{x^2+y^2}}$. S

7. Duoti tokie teigiami realieji a, b, c, kad $ab+bc+ac=1$. Įrodykite, kad $10a^2+10b^2+c^2 \geqslant 4$. S

8. Tegu a, b, c - teigiami realieji skaičiai, tokie, kad $a^2+b^2+c^2=1$. Raskite minimumą S
$$S=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}.$$

9. Raskite minimalią reiškinio $\Omega=5a^2+6b^2+5c^2+2ac-4a+4c$ reikšmę, kai a, b, c - realieji skaičiai. S

10. Įrodykite, kad jei x ir y yra realieji iš intervalo $(0,1)$, tai galioja nelygybė S
$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{1-xy}.$$

11. Tegu a, b, c - tokie teigiami realieji, kurie tenkina $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c$. Įrodykite, kad $a+b+c \geqslant 3abc$. S

12. [LitKo 2006 *(sąlyga mažumėlę modifikuota)*] Tegu S
$$E=5(x^2+y^2+z^2)+6(xy+yz+zx)-4(13x+15y+16z)+\Psi.$$
Raskite minimalią E reikšmę, kai x, y, z yra realieji skaičiai, o Ψ - jūsų mėgstamiausias realusis skaičius.

13. [LitMo 1987] Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja S
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

14. [USAMO 1998] Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja S
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

15. [IMO 1996 Shortlist] Tegu a, b, c bus tokie teigiami realieji, kad $abc = 1$. Įrodykite, kad *S*
$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1.$$

16. [IMO 2005] Duota, kad a, b, c - realieji, tokie, kad $abc \geqslant 1$. Įrodykite, kad galioja nelygybė *S*
$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+a^2+c^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\geqslant 0.$$

17. [Vascile Cartoaje] Įrodykite, kad realiesiems a, b, c galioja *S*
$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

2.1.2 Vidurkių nelygybės

Apibrėžimas. Duoti teigiami realieji $x_1, x_2, ..., x_n$. Laipsnio r vidurkis yra žymimas $M_r(x)$ ir apibrėžiamas

$$M_r(x) = \left(\frac{x_1^r + x_2^r + ... + x_n^r}{n}\right)^{1/r}.$$

- $M_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra žymimas $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir vadinamas aritmetiniu vidurkiu.
- $M_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra žymimas $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir vadinamas kvadratiniu vidurkiu.
- $M_{-1}(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra žymimas $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir vadinamas harmoniniu vidurkiu.
- Nors iš pateiktos išraiškos sunku apibrėžti M_0, yra žinoma, kad kai $r \to 0$, tai $M_r(x) \to G(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 x_2 ... x_n)^{1/n}$, kas yra vadinama geometriniu vidurkiu.

Teorema (Bendroji vidurkių nelygybė)**.** *Jei $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ yra realiųjų teigiamų skaičių aibė, tai su $r \geqslant s$ galios nelygybė $M_s(x) \geqslant M_r(x)$. Lygybė bus pasiekiama tada ir tik tada, kai $x_1 = x_2 = ... = x_n$.*

Nelygybė yra įrodoma su Hölder'io nelygybe, su kuria skaitytoją supažindinsime gerokai vėliau.

Dažniausiai naudojamos vidurkių nelygybės yra atskiri bendrosios teoremos atvejai.

Teorema (AM-GM nelygybė)**.** *Jei $x_1, x_2, ..., x_n$ yra teigiami sveikieji, tai galioja*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

Įrodymas. Yra beveik 40 šios nelygybės įrodymo būdų. Čia pateiksime vieno didžiausio visų laikų matematikos korifėjaus prancūzo Augustin-Louis Cauchy įrodymą.

Kai $n = 1$ ir $n = 2$, nelygybė teisinga. Įrodysime, kad jei nelygybė teisinga su n, tai ji teisinga su $2n$:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{2n}}{n}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} ... x_{2n}}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{x_1 x_2 ... x_{2n}}
\end{aligned}$$

Taigi, nelygybė yra teisinga, kai n - dvejeto laipsnis. Jei n nėra dvejeto laipsnis, tai būtinai rasime tokį $m > n$, kuris yra dvejeto laipsnis. Tegu tada α - tų n skaičių aritmetinis vidurkis. Tuomet

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + (m-n)\alpha}{m} \\
&\geqslant \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \cdot \alpha^{(m-n)}} \\
&\Rightarrow \alpha \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.
\end{aligned}$$

Tai užbaigia įrodymą. Taigi, nelygybė yra teisinga visiems n, o lygybės atvejis galios tada ir tik tada, kai $x_1 = x_2 = ... = x_n$. □

Pastaba. Kitos plačiai naudojamos šios nelygybės formos:

- $x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$;
- $x_1x_2...x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^n$.

Teorema (SM-AM nelygybė)**.** *Jei $x_1, x_2, ..., x_n$ yra teigiami realieji, tai galioja*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Lygybė galios tada ir tik tada, kai $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Įrodymas. Kaip lemą naudosime ankstesnio skyrelio penkto uždavinio rezultatą.
Lema. Jei $x_1, x_2, ..., x_n$ ir $y_1, y_2, ..., y_n$ - teigiami realieji, tai galioja nelygybė

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}.$$

Jei taikysime lemą su $y_1 = y_2 = ... = y_n = n$, tai ir gausime norimą nelygybę. Lygybės atvejis bus tada ir tik tada, kai $x_1 = x_2 = ... = x_n$. □

Iš šių dviejų teoremų seka trečioji.

Teorema (SM-GM nelygybė)**.** *Jei $x_1, x_2, ..., x_n$ yra teigiami realieji, tai galioja*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}.$$

Lygybė galios tada ir tik tada, kai $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Dažnai naujai išvestų nelygybių teisingumą reikia tikrinti, juk nenorime bandyti įrodyti neteisingų. Yra žinoma Muirhead'o nelygybė, apibendrinanti AM-GM nelygybę, kuri yra dažniausiai taikoma iš vidurkių nelygybių. Šiai naujajai nelygybei įvesime keletą apibrėžimų ir žymėjimų.

Apibrėžimas. Žymėsime

$$T[a_1, a_2, ..., a_n] = \sum_{sym} f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

kai $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_n^{a_n}$, o $a_1, a_2, ..., a_n$ ir $x_1, x_2, ..., x_n$ - teigiami realieji skaičiai.

Apibrėžimas. Seka $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ mažoruoja (angl. *majorize*) seką $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ (žymėsime $A \succ B$), jeigu tenkinamos trys sąlygos:

- $a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$;
- $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant 0$ ir $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant ... \geqslant b_n \geqslant 0$;

- $a_1 + a_2 + ... + a_i \geqslant b_1 + b_2 + ... + b_i$, su visais $0 < i < n$.

Jau galime formuluoti teoremą:

Teorema (Muirhead). *Jei $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ir $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ yra teigiamų realiųjų skaičių sekos, ir $A \succ B$, tai galioja nelygybė*

$$T[A] \geqslant T[B].$$

Lygybė galios tada, kai sekos A ir B yra identiškos.

Pastaba. Nors Muirhead'o nelygybė turi normalų teoremos statusą, ji nėra pripažįstama kaip dalis oficialaus olimpiados uždavinio sprendimo. Ji dažniausiai naudojama nustatyti, ar naujai gautą nelygybę galime įrodyti tinkamai pritaikę AM-GM nelygybę. Pats AM-GM nelygybės taikymas yra grynai techninė problema, kuri atskirais atvejais yra lengvai išsprendžiama.

Iliustruokime naujas žinias keliais pavyzdžiais.
Pavyzdys. Tarkime, sprendėme sprendėme kokį labai įdomų uždavinį ir gavome, kad lieka įrodyti

$$a^6b^2c + a^6c^2b + b^6c^2a + b^6a^2c + c^6a^2b + c^6b^2a \geqslant \\ a^5b^4 + a^5c^4 + b^5c^4 + b^5a^4 + c^5a^4 + c^5b^4.$$

Vienintelė mintis, kuri šauna į galvą, pamačius tokią nelygybę yra: „Blogai." Pastebėkime, kad kairė nelygybės pusė yra, taip sakant, $T[6, 2, 1]$, o dešinė - $T[4, 5, 0]$. Šios dvi laipsnių sekos nemažoruoja. Vadinasi, Muirhead'o nelygybės taikyti negalima. Tai reikš, kad AM-GM nelygybė yra per silpna, o tai byloja, kad problema yra pakankamai sudėtinga, jei ši nelygybė yra apskritai teisinga. Jei gautume, kad su kuriuo nors kintamųjų rinkiniu nelygybė yra neteisinga, teks sugrįžti prie pradinės nelygybės.
Pavyzdys. Jei turėtume panašią į anktesnio pavyzdžio, bet vos kitokią nelygybę

$$a^6b^2c + a^6c^2b + b^6c^2a + b^6a^2c + c^6a^2b + c^6b^2a \geqslant \\ a^5b^3c + a^5c^3b + b^5c^3a + b^5a^3c + c^5a^3b + c^5b^3a,$$

tai matytume, kad kairės pusės seka $T[6, 2, 1]$ mažoruoja dešinės $T[5, 3, 1]$ pusės seką ir nelygybė yra teisinga. Pilnam įrodymui trūksta tik tinkamos AM-GM nelygybės formos. Štai kaip galime ją konstruoti: matome, kad dešinėje mažiausias laipsnis yra 1, kaip ir kairėje. Taigi, norėdami gauti narį, pavyzdžiui, b^5a^3c, iš kairės pusės galime naudoti tik narius a^6b^2c ir b^6a^2c, nes visi kiti prie c duos laipsnį, didesnį už 1. Tebūnie prie šių dalių esantys koeficientai atitinkamai k ir l. Pagal AM-GM:

$$ka^6b^2c + lb^6a^2c \geqslant (k + l) \sqrt[k+l]{a^{6k+2l}b^{6l+2k}c^{k+l}}.$$

Tuomet, kadangi turime gauti narį b^5a^3c, spręsime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 6k + 2l = 3(k + l) \\ 6l + 2k = 5(k + l) \end{cases} \Rightarrow l = 3k.$$

Ir tikrai, kai $l = 1$, o $k = 3$, pagal AM-GM bus:

$$a^6b^2c + 3b^6a^2c \geqslant 4\sqrt[4]{b^{20}a^{12}c^4} = 4b^5a^3c.$$

Pritaikę nelygybę simetrinėms sumoms ir gausime tai, ką reikėjo įrodyti:

$$4\sum_{sym} a^6b^2c = \sum_{sym} a^6b^2c + 3b^6a^2c \geqslant 4\sum_{sym} b^5a^3c.$$

Kai kurie skyrelyje pateikti uždaviniai yra tiesioginės Muirhead'o nelygybės išvados. Tikimės, kad skaitytojui bus drąsiau juos spręsti žinant, kad nelygybės tikrai galioja.

Vidurkių nelygybės yra neatsiejamos nuo homogeniškumo sąvokos, tad pats laikas su ja susipažinti. Kad geriau suvoktume, kaip atpažinti homogenišką nelygybę, susipažinsime su funkcijos laipsnio sąvoka.

Tegu $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ bus tiesiog funkcija nuo kintamųjų $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

Jei turima funkcija yra vienanaris, t.y.: $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}...a_n^{\alpha_n}$, tai vienanario laipsnis bus deg $f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n$.

Pavyzdys. *3-io laipsnio vienanariai yra* $a^3, b^2c, \frac{a^4}{d}, \frac{a^7}{bc^3}$.

Sudėdami ar atimdami vienanarius, gausime vis naujas funkcijas, kurių laipsnius galėsime nustatyti pasinaudodami keliomis taisyklėmis. Tegu $f(A_i), g(A_i), h(A_i)$ - funkcijos, kur A_i - kokia nors realiųjų kintamųjų aibė.

- Jei turime $f(A_1) \neq 0$ ir $f(A_1) = g(A_2) \pm h(A_3)$, o deg $g(A_2) =$ deg $h(A_2)$, tai deg $f(A_1) =$ deg $g(A_2) =$ deg $h(A_3)$.
- Jei $f(A_1) = g(A_2) \cdot h(A_3)$, tai deg $f(A_1) =$ deg $g(A_2) +$ deg $h(A_3)$.

Pavyzdys. *Tokias taisykles ir jų derinius taikydami galėsime skaičiuoti kai kurių funkcijų laipsnius:* $\frac{a^3}{b+a}$ *laipsnis bus 2,* $\frac{\sqrt[3]{a^2-c^2}}{\sqrt[5]{a^7-b^7+c^7}}$ *laipsnis bus* $\frac{2}{3} - \frac{7}{5} = -\frac{11}{15}$. *Dėmesio! Tokios funkcijos kaip* $f(a, b) = \frac{a^3}{a^2-b}$ *laipsnio skaičiuoti negalime.*

Funkciją (nelygybę) galėsime vadinti homogenine, jei ją galima pertvarkyti į pavidalą $h(A) = \sum f_i(A_j)$ ir visų funkcijų $f_i(A_j)$ laipsniai lygūs.

Homogeniškumo oficialus apibrėžimas:

Apibrėžimas. Jei $h(A)$yra funkcija nuo kintamųjų aibės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tai h yra homogeninė funkcija tada ir tik tada, kai $h(ta_1, ta_2, ta_3, ..., ta_n) = t^n h(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, kur t - bet koks teigiamas skaičius.

Jei yra duota nehomogeninė nelygybė, tačiau taip pat yra duota ir papildoma sąlyga, dažnai naudinga nelygybę pertvarkyti taip, kad ji taptų homogenine, na o tada, nelygybė turės būti teisinga net tada, kai kintamieji netenkins duotos papildomos sąlygos. Tą jau esame atlikę kelis kartus, net ir nežinodami homogeniškumo sąvokos.

Pažymėtina, kad visos vidurkių nelygybės galioja tik su teigiamais realiaisiais skaičiais, o lygybės atvejis pasiekiamas, kai visi kintamieji lygūs. Nors tai nėra labai sudėtingas dalykas, dažnai svarbu atkreipti dėmesį, kad jis būtų išlaikomas, ypač sprendžiant nehomogenines nelygybes ar ieškant funkcijų ekstremumų.

Nors daugiausiai naudosime AM-GM nelygybę, kartais praverčia ir kitos vidurkių nelygybės. Pavyzdžiai iliustruos, kad nelygybę galime taikyti tiek pereinant nuo aritmetinio vidurkio prie geometrinio, tiek atvirkščiai. Pirmuosiuose nagrinėsime, kas vyksta, kai apibrėžimo sritis yra ribota arba yra konkreti sąlyga, neleidžianti tiesiogiai taikyti nelygybės. Toliau pateikiami pavyzdžiai atspindi neretai pasitaikančius atvejus, kada tiesioginis, „aklas" AM-GM nelygybės taikymas neduoda jokios naudos, o reikia sugalvoti kaip pertvarkyti duotą nelygybę, ar prisidėti ir atsiimti papildomų reiškinių, kad taikoma AM-GM nelygybė padėtų pasiekti norimą rezultatą. Pateiksime ir keletą nehomogeninių nelygybių, kurioms išspręsti reikės itin daug fantazijos.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 7. *Duotas realus $a \geqslant 3$. Raskite $S = a + \frac{1}{a}$ minimumą.*

Dažna klaida. Pagal AM-GM nelygybę, $S = a + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$.
Paaiškinimas. Jei S minimumas yra 2, tai tada $a = \frac{a}{1} = 1$, kas prieštarauja duotai sąlygai, kad $a \geqslant 3$.
Sprendimo ieškojimas. Pastebime, kad $S > a \geqslant 3$. Spėjame, kad minimumas bus pasiekiamas, kai $a = 3$. Tuomet $\frac{1}{a} = \frac{1}{3} = \frac{a}{9}$.
Sprendimas. $S = a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + \frac{a}{9} + \frac{8a}{9} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{9}} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{10}{3}$. Minimumas bus pasiekiamas, kai $\frac{1}{a} = \frac{a}{9} \Rightarrow a = 3$. △

Pastaba. Teisingo sprendimo paslaptis šiame uždavinyje, kaip ir kituose panašiuose šio skyrelio uždaviniuose, yra teisingo lygybės atvejo atspėjimas.

Pavyzdys 8 (Macedonia 1999)**.** *Realieji teigiami a, b, c tenkina $a^2+b^2+c^2 = 1$. Raskite minimumą $T = a + c + b + \frac{1}{abc}$.*

Dažna klaida. Pagal AM-GM nelygybę $T \geqslant 4\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{abc}} = 4. \Rightarrow T$ minimumas yra 4.
Paaiškinimas. Jei T minimumas yra 4, tai tada $a = b = c = \frac{1}{abc} = 1$, kas prieštarauja duotai sąlygai.
Sprendimo ieškojimas. Kadangi T yra simetrinė, minimumas greičiausiai bus pasiekiamas, kai $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Sprendimas.

$$\begin{aligned}
T &= a+b+c+\frac{1}{9abc}+\frac{8}{9abc} \\
&\geqslant 4\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{9abc}}+\frac{8}{9abc} && \text{(AM-GM nelygybė)} \\
&\geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{8}{9\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3} && \text{(SM-GM nelygybė)} \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{8}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

△

Pavyzdys 9. *Duota a, b, c - teigiami realieji skaičiai, tokie, kad $a+b+c \leqslant \frac{3}{2}$. Raskite minimumą*

$$S = \sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}.$$

Dažna klaida. Pagal AM-GM nelygybę $S \geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}\cdot\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}}$ $\geqslant 3\sqrt[6]{\left(2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{b^2}}\right)\left(2\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{c^2}}\right)\left(2\sqrt{c^2\cdot\frac{1}{a^2}}\right)} = 3\sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } S = 3\sqrt{2}$.
Paaiškinimas. Jei S minimumas yra $3\sqrt{2}$, tai tada $a=b=c=\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}=1$, kas prieštarauja duotai sąlygai.
Sprendimo ieškojimas. Kadangi S yra ciklinė a,b,c išraiška, labai tikėtina, kad minimumas bus pasiekiamas, kai $a=b=c=\frac{1}{2}$. Tuomet $a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4}=\frac{1}{16a^2}=\frac{1}{16b^2}=\frac{1}{16c^2}$.
Sprendimas. Visur taikome AM-GM nelygybę:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{cyc}\sqrt{a^2+\frac{1}{16b^2}+\ldots+\frac{1}{16b^2}} \geqslant \sum_{cyc}\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} \geqslant \sqrt{17}\cdot\sum_{cyc}\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}\\
&\geqslant \sqrt{17}\left(3\sqrt[3]{\prod_{cyc}\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}}\right) = 3\sqrt{17}\cdot\sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}} = \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{(2a\cdot 2b\cdot 2c)^5}}\\
&\geqslant \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geqslant \frac{3\sqrt{17}}{2}.
\end{aligned}
$$

Minimumas yra $\frac{3\sqrt{17}}{2}$, pasiekiamas, kai $a=b=c=1/2$. △

Pavyzdys 10. *Tegu a,b,c - teigiami realieji, tokie, kad $a+b+c=3$. Raskite $S = \sqrt[3]{a(b+2c)}+\sqrt[3]{b(c+2a)}+\sqrt[3]{c(a+2b)}$ maksimumą.*

Sprendimas. Taikome AM-GM, tačiau priešinga puse:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{cyc}\sqrt[3]{a(b+2c)} = \sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[3]{3a(b+2c)\cdot 3}\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\sum_{cyc}\frac{3a+(b+2c)+3}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{6(a+b+c)+9}{3} = 3\sqrt[3]{3}.
\end{aligned}
$$

Vadinasi, maksimumas yra $3\sqrt[3]{3}$ ir pasiekiamas, kai $a=b=c=1$. △

Pavyzdys 11. *Įrodykite, kad kai n - natūralusis skaičius didesnis už 1, galioja*

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2.$$

Įrodymas. Taikome AM-GM. Akivaizdu, kad lygybės atvejis negalios, tad nelygybė bus griežta.

$$
+\left\{\begin{array}{l}
\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < \frac{1}{n}\cdot\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)+n-1\right] = 1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\\
\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < \frac{1}{n}\cdot\left[\left(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)+n-1\right] = 1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}
\end{array}\right.
$$

Sudėję gausime tai, ką reikėjo įrodyti. □

Pavyzdys 12. *Įrodykite, kad teigiami realieji a, b, c tenkina nelygybę*

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geqslant a+b+c.$$

Sprendimas. Pagal AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{b^2}+b+b &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}\cdot b\cdot b}=3a,\\
\frac{b^3}{c^2}+c+c &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2}\cdot c\cdot c}=3b,\\
\frac{c^3}{a^2}+a+a &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^2}\cdot a\cdot a}=3c.
\end{aligned}$$

Sudėję šias nelygybes gausime tai, ką ir reikėjo įrodyti. □

Pavyzdys 13. *Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja*

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geqslant \frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}.$$

Įrodymas. Pagal AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned}
\frac{a^5}{b^3}+\frac{a^5}{b^3}+\frac{a^5}{b^3}+\frac{a^5}{b^3}+b^2 \geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{a^5}{b^3}\right)^4\cdot b^2}=5\cdot\frac{a^4}{b^2};\\
\frac{b^5}{c^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{b^5}{c^3}+c^2 \geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{b^5}{c^3}\right)^4\cdot c^2}=5\cdot\frac{b^4}{c^2};\\
\frac{c^5}{a^3}+\frac{c^5}{a^3}+\frac{c^5}{a^3}+\frac{c^5}{a^3}+a^2 \geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{c^5}{a^3}\right)^4\cdot a^2}=5\cdot\frac{c^4}{a^2}.
\end{aligned}$$

Sudėję gausime

$$4\left(\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\right)+a^2+b^2+c^2 \geqslant 5\left(\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\right). \tag{1}$$

Taip pat:

$$\begin{aligned}
\frac{a^4}{b^2}+b^2 &\geqslant 2\sqrt{\frac{a^4}{b^2}\cdot b^2}=2a^2;\\
\frac{b^4}{c^2}+c^2 &\geqslant 2\sqrt{\frac{b^4}{c^2}\cdot c^2}=2b^2;\\
\frac{c^4}{a^2}+a^2 &\geqslant 2\sqrt{\frac{c^4}{a^2}\cdot a^2}=2c^2.
\end{aligned}$$

Sudėję gausime

$$\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2} \geqslant a^2+b^2+c^2. \tag{2}$$

Sudėję nelygybes (1) ir (2) gausime tai, ką ir reikėjo įrodyti. □

Pavyzdys 14 (Nesbitt'o nelygybė)**.** *Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Pastaba. Matematikos profesionalai dažnai rungiasi, kuris žino daugiau šios nelygybės įrodymo būdų. Kvalifikacinis raundas - 4. Kol kas pateiksime tik vieną. Nesbitt'o nelygybė yra dalinis Shapiro nelygybės atvejis.

Įrodymas. Tegu $S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$, $A=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}$, $B=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}$. Tada pagal AM-GM

$$\begin{aligned}
A+S &= \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{c+a}{a+b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{a+c}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3; \\
B+S &= \frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{a+c}+\frac{c+b}{a+b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c}\cdot\frac{b+a}{a+c}\cdot\frac{c+b}{a+b}}=3; \qquad \text{be to,} \\
A+B &= 3.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow S=\frac{A+S+B+S-A-B}{2}\geqslant\frac{3+3-3}{2}=\frac{3}{2}$. □

Pavyzdys 15. *Įrodykite, kad tokiems realiesiems teigiamiems a, b, c, kur $a+b+c=3$, galioja*

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Įrodymas. Duotą nelygybę verčiame homogenine naudodami duotą sąlygą ir pertvarkome:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b+c}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+b}{8}+\frac{a+c}{8}-\frac{a+b}{8}-\frac{a+c}{8}\right)\geqslant\frac{1}{4}.$$

Sprendžiame naudodami AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned}
\text{KAIRĖ PUSĖ} &\geqslant \frac{1}{a+b+c}\cdot\sum_{cyc}\left(3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}\cdot\frac{a+b}{8}\cdot\frac{a+c}{8}}\right)-\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{a+b+c}\cdot\sum_{cyc}\frac{3a}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3(a+b+c)}{4(a+b+c)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

Pavyzdys 16. *Įrodykite, kad jei a, b, c - tokie teigiami realieji skaičiai, kad $a+b+c=3abc$, tai $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant 3$.*

Įrodymas. $a+b+c=3abc\Rightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=3$. Pagal AM-GM gausime

$$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+3=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+1\right)\geqslant 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=9.$$

□

Pavyzdys 17. *Duoti a, b, c yra teigiami realieji skaičiai. Įrodykite, kad*

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} > \frac{5}{2}.$$

Įrodymas. Pertvarkome ir naudojame AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{c}{a}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{c}{a}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{c}{a}} \\ &> 6 \sqrt[6]{\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)^3} \\ &= \frac{6}{\sqrt[6]{108}} > \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

□

Uždaviniai

1. Tegu a, b - teigiami realieji, tokie, kad $a+b \leqslant 1$. Raskite $S = ab + \frac{1}{ab}$ minimumą. S

2. Tegu a, b, c - teigiami realieji, tokie, kad $a+b+c \leqslant \frac{3}{2}$. Raskite $S = a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ minimumą. S

3. Tegu a, b, c - teigiami realieji, tokie, kad $a+b+c = 1$. Raskite maksimalią $S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{a+c}$ reikšmę. S

4. Tegu a, b, c - teigiami realieji, tokie, kad $a \geqslant 2, b \geqslant 6, c \geqslant 12$. Raskite didžiausią galimą reikšmę, kurią įgyja S
$$\Gamma = \frac{bc\sqrt{a-2} + ac\sqrt[3]{b-6} + ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}.$$

5. Įrodykite, kad natūraliesiems n galioja S
$$I = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \ldots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < n.$$

6. Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja S
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

7. [Mircea Lascu, *Gazeta Matematică*] Tegu a, b, c tokie teigiami realieji skaičiai, kad $abc = 1$. Įrodykite nelygybę S
$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

8. Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja S

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \leqslant \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}.$$

9. Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja S

$$\frac{a^2}{b^5}+\frac{b^2}{c^5}+\frac{c^2}{a^5} \geqslant \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}.$$

10. Tegu realieji teigiami a, b, c tenkina $a+b+c=1$. Įrodykite, kad jiems galioja $(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c)$. S

11. [APMO 1998] Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja S

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

12. Duoti teigiami realieji a, b, c, d. Raskite minimalią reiškinio reikšmę: S

$$S=\left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right).$$

13. Duoti teigiami realieji a, b, c tokie, kad $a+b+c=3$. Įrodykite, kad S

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)} \geqslant 1.$$

14. Duoti teigiami realieji a, b, c tokie, kad $ab+bc+ac=1$. Įrodykite, kad S

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)} \geqslant \frac{9}{2}.$$

15. [Romania Junior Balkan TST 2008] Duoti teigiami realieji skaičiai tenkina $ab+bc+ac=3$. Įrodykite, kad jiems galioja nelygybė S

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(a+c)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

16. [France Pre-MO 2005] Įrodykite, kad jei a, b, c - tokie teigiami realieji, kad $a^2+b^2+c^2=3$, tai galioja S

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geqslant 3.$$

17. [Walther Janous, *Crux Mathematicorum*] Įrodykite, kad su teigiamais realiaisiais x, y, z galioja nelygybė S

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(x+y)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(x+z)(y+z)}} \leqslant 1.$$

18. [Russia 2002] Tegu x, y, z - teigiami realieji skaičiai, kurie tenkina $x+y+z=3$. Įrodykite nelygybę *S*
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqslant xy+xz+yz.$$

19. [IMO 1998 Shortlist] Tegu a, b, c bus tokie teigiami realieji skaičiai, kad $abc=1$. Įrodykite, kad *S*
$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

20. Duoti teigiami realieji a, b, c tokie, kad $a\sqrt{\frac{b}{c}}+b\sqrt{\frac{c}{a}}+c\sqrt{\frac{a}{b}}=3$. Įrodykite, kad *S*
$$\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3} \geqslant 3.$$

21. [IMO 1990 Shortlist] Realieji a, b, c, d tenkina $ab+bc+cd+da=1$. Įrodykite, kad jie tenkins ir *S*
$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

22. [Tran Phuong] Įrodykite, kad su visais teigiamais realiaisiais a, b, c galioja *S*
$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+abc \leqslant \frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}.$$

2.1.3 Cauchy-Schwarz nelygybė

Cauchy-Schwarz nelygybė yra viena dažniausiai taikomų ir labiausiai naudingų olimpiadų uždavinių sprendimuose.

Teorema (Cauchy-Schwarz nelygybė)**.** *Tegu* $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ *ir* $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ *bus realiųjų skaičių sekos. Tuomet galios nelygybė*

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Lygybė galios tada ir tik tada, kai $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Pateiksime keletą populiariausių nelygybės įrodymų.

Pirmas įrodymas. Pasinaudosime Lagrange (Lagranžo) tapatybe, kuri padeda nelygybę įrodyti iškart:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)^2$$
$$= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_ib_j - a_jb_i)^2.$$

□

Antras įrodymas. Tegu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ir $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ bus realiųjų skaičių sekos. Imkime funkciją

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2.$$

Pastebėkime, kad $f(x) \geqslant 0$, vadinasi $f(x)$ diskriminantas $D \leqslant 0$. Kita vertus,

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Tada

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

□

Trečias įrodymas. Pagal nelygybę $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$:

$$\frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2} + \frac{b_i^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2}$$
$$\geqslant \frac{2a_ib_i}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2)}}.$$

Sudėję visus dėmenis su visais i, kai $1 \geqslant i \geqslant n$, gausime tai, ką ir reikėjo įrodyti. □

Ketvirtas įrodymas. Prisiminkime nelygybių skyrelio **Pirmieji žingsniai** uždavinį nr. 5. Gaunama nelygybė yra vadinama Cauchy-Schwarz (CS) nelygybės Engel forma.

Teorema (CS - Engel forma)**.** *Jei* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ir* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *yra realiųjų skaičių sekos, kai visi* $b_i > 0$*, tai galioja*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Lygybė galios tada ir tik tada, kai $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Iš esmės tai ir yra Cauchy-Schwarz nelygybė, tiksliau, kitokia jos forma: belieka visiems i įstatyti $a_i \to a_i b_i$ ir $b_i \to b_i^2$ ir gausime standartinę išraišką, kuri bus teisinga su visais realiaisiais $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ir $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. □

Kitos Cauchy-Schwarz nelygybės formos:

- $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$;
- $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)} \geqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$;

Kai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir $b_1, b_2, \ldots, b_n$ teigiami:

- $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \geqslant (\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + ... + \sqrt{a_nb_n})^2$;
- $a_1 + a_2 + ... + a_n \geqslant \frac{(\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + ... + \sqrt{a_nb_n})^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$;
- $\sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)} \geqslant \sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \ldots + \sqrt{a_nb_n}$.

Sunku net pasakyti, ar naudingesnė Engel forma, ar pati Cauchy-Schwarz nelygybė. Dažniausiai, jas taikant gaunamas tas pats rezultatas. Svarbu atkreipti dėmesį, kad skiriasi Cauchy-Schwarz ir Engel formos nelygybių apibrėžimo sritys: pirmoji galioja su visais realiaisiais, o antroji reikalauja, kad trupmenų vardikliai būtų teigiami. Nepaisant šių skirtumų, šios dvi nelygybės yra vadinamos vienu vardu - Cauchy-Schwarz nelygybe.

Sprendžiant iš lygybės atvejo, jei AM-GM nelygybė sumažina reiškinį iki lygių kintamųjų, kuomet Cauchy-Schwarz lygybės atvejis pasiekiamas tada, kai kintamieji yra proporcingi, galime sakyti, kad Cauchy-Schwarz nelygybė yra lankstesnė ir bendresnė.

Daugelį ankstesnių pavyzdžių ir uždavinių galima padaryti ir naudojant Cauhcy-Schwarz nelygybę. Skaitytoją raginame pačiam pabandyti tai atlikti. Mes žengsime prie pavydžių, kuriuose matysis, kaip įvairiai galime pritaikyti Cauchy-Schwarz nelygybę, gaudami neįtikėtinus rezultatus.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 18 (Baltic Way 2008)**.** *Įrodykite, kad jei realieji* a, b, c *tenkina* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$*, tai galioja*

$$\frac{a^2}{2 + b + c^2} + \frac{b^2}{2 + c + a^2} + \frac{c^2}{2 + a + b^2} \geqslant \frac{(a + b + c)^2}{12}.$$

Kada galios lygybė?

Įrodymas. Pastebėkime, kad $2 + b > 0$, nes $b^2 \leqslant 3$. Taip pat bus $2 + a > 0$ ir $2 + c > 0$. Tuomet pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\text{KAIRĖ PUSĖ} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{6 + a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c}.$$

Taigi, belieka įrodyti $a + b + c \leqslant 3 \Leftrightarrow 2a + 2b + 2c \leqslant 3 + a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geqslant 0$, kas yra akivaizdu. Lygybė galios, kai $a = b = c = 1$. $\square$

Pavyzdys 19. *Duoti teigiami realieji $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ tenkina $a + b + c + d = 1$. Raskite mažiausią reiškinio $Z = 4a^2 + 3b^2 + 2c^2 + d^2$ reikšmę.*

Sprendimas. Pastebėkime, kad $a \geqslant \frac{1}{4}$, $a + b \geqslant \frac{1}{2}$, $a + b + c \geqslant \frac{3}{4}$, $a + b + c + d = 1$. Sudėję gausime $4a + 3b + 2c + d \geqslant \frac{10}{4}$. Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$Z = 4a^2 + 3b^2 + 2c^2 + d^2 \geqslant \frac{(4a + 3b + 2c + d)^2}{10} \geqslant \frac{5}{8}.$$

Minimumas bus $\frac{5}{8}$. Jis pasiekiamas, kai $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. $\triangle$

Pavyzdys 20 (Pham Kim Hung)**.** *Įrodykite, kad teigiami realieji a, b, c tenkina*

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ac}{2b^2 + a^2 + c^2} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + a^2 + b^2} \geqslant 0.$$

Įrodymas. Jei nelygybę padauginsime iš -2 ir prie kairės pusės trupmenų pridėsime po 1, o dešinėje pridėsime 3, tai gausime ekvivalenčią nelygybę:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(a+c)^2}{2b^2 + a^2 + c^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \leqslant 3. \tag{1}$$

Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\begin{aligned} \text{KAIRĖ PUSĖ (1)} &\leqslant \sum_{cyc} \frac{b^2}{b^2 + a^2} + \sum_{cyc} \frac{c^2}{c^2 + a^2} \\ &= \sum_{cyc} \frac{b^2 + a^2}{b^2 + a^2} = 3 \end{aligned}$$

$\square$

Pavyzdys 21 (Nesbitt'o nelygybė)**.** *Jei a, b, c - teigiami realieji skaičiai, tai galioja nelygybė*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Įrodymas. Naudosime Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\text{KAIRĖ PUSĖ} = \frac{a^2}{ab + ac} + \frac{b^2}{ab + bc} + \frac{c^2}{ac + bc} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab + bc + ac)} \geqslant \frac{3(ab + bc + ac)}{2(ab + bc + ac)} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

Pavyzdys 22 (Iran 1998)**.** *Skaičiai x, y, z tokie, kad $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, ir $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$. Įrodykite, kad galios nelygybė*

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Įrodymas. Pertvarkykime duotą sąlygą: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z} = 1$. Taikysime Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$x+y+z = (x+y+z)(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}) \geqslant (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2,$$

ką ir reikėjo įrodyti. □

Uždaviniai

1. Dešimt teigiamų realiųjų skaičių tenkina $a_1+a_2+\ldots+a_{10} = 1$ ir $a_1 \geqslant a_2+a_3 \geqslant a_4+a_5+a_6 \geqslant a_7+a_8+a_9+a_{10}$. Raskite reiškinio $Z = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{10}^2$ mažiausią pasiekiamą reikšmę. *S*

2. Teigiami realieji a, b, c, d tenkina nelygybes $a \leqslant 1$, $a+b \leqslant 5$, $a+b+c \leqslant 14$ ir $a+b+c+d \leqslant 30$. Įrodykite, kad galioja nelygybė $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leqslant 10$. *S*

3. [IMO 1995] Teigiami realieji a, b, c yra tokie, kad $abc = 1$. Įrodykite, kad teisinga nelygybė *S*
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

4. Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems $x_1, x_2, \ldots, x_n$ galioja nelygybė *S*
$$\sqrt{x_1(3x_2+x_3)}+\sqrt{x_2(3x_3+x_4)}+\ldots+\sqrt{x_n(3x_1+x_2)} \leqslant 2(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

5. [Darij Grinberg] Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja *S*
$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

6. Tegu a, b, x, y, z bus teigiami realieji skaičiai. Parodykite, kad *S*
$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geqslant \frac{3}{a+b}.$$

7. Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems skaičiams, tokiems, kad $a+b+c = 3$, galioja nelygybė *S*
$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+a^2b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. Parodykite, kad teigiamiems realiesiems $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir $b_1, b_2, \ldots, b_n$ galioja nelygybė *S*
$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}.$$

9. [JBMO 2002 Shortlist] Įrodykite, kad jei teigiami realieji skaičiai tenkina $abc = 2$, tai galios nelygybė *S*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}.$$

10. [Walther Janous, *Crux Mathematicorum*] Tegu x, y ir z bus teigiami realieji. Įrodykite, kad galios *S*

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leqslant 1.$$

11. Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems skaičiams a, b, c, d, e, f galioja nelygybė *S*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geqslant 3.$$

12. [Ukraine 2001] Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c, x, y, z, kai $x+y+z = 1$, galioja nelygybė *S*

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy+xz+yz)(ab+bc+ac)} \leqslant a+b+c.$$

13. [Japan TST 2004] Tegu a, b, c - tokie teigiami realieji skaičiai, kurių suma lygi 1. Įrodykite, kad galios nelygybė *S*

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leqslant \frac{2a}{b} + \frac{2b}{c} + \frac{2c}{a}.$$

14. [Iran TST 2009] Duoti teigiami realieji a, b, c, kurių suma lygi 3. Įrodykite, kad *S*

$$\frac{1}{2+a^2+b^2} + \frac{1}{2+c^2+a^2} + \frac{1}{2+b^2+c^2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

15. [Komal Magazine] Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja *S*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 3(a+b+c)^2.$$

2.1.4 Specialios technikos

Šiame skyrelyje susipažinsime su keliomis populiariomis gudrybėmis, kurios gali labai pagelbėti uždavinių sprendime. Sprendimų „varikliukais" liks mums jau gerai žinomos nelygybės, tokios kaip AM-GM ir Cauchy-Schwarz. Pagrindinė gudrybė - keitiniai. Jei skaitytojas abejoja jų galingumu, tegu pabando pateiktas nelygybes išspęsti alternatyviu būdu. Dalis pavyzdžių ir uždavinių yra susiję su geometrija, tačiau algebrinėse nelygybėse užtenka ir elementarių žinių.

Homogenizacija ir Normalizacija

Homogenizacija - tai nehomogeninės nelygybės vertimas homogenine, dažniausiai tam naudojant duotą papildomą sąlyga. Iki šiol mes nieko nebijodami drąsiai homogenizuodavome nelygybes ir bėdų nematėme, tačiau neretai taip primityviai homogenizuoti nehomogeninę nelygybę yra bjauroka ir visiškai nenaudinga. Todėl šiame skyrelyje susipažinsime su specialiais homogenizuojančiais keitiniais, kurie duos gerokai daugiau naudos.

Šių keitinių esmė yra išnaudoti papildomą sąlygą taip, kad visi kintamieji taptų nulinio laipsnio, o ir tuomet visa nelygybė taps nulinio laipsnio. Kiekvienai duotai sąlygai galime sugalvoti atitinkamų keitinių.

- Duota $abc = k^3$. Geras keitinys būtų $a = \frac{kx}{y}$, $b = \frac{ky}{z}$, $c = \frac{kz}{x}$. Visada galime sugalvoti įspūdingesnį: $a = \frac{kx^3y}{z^4}$ ir t.t.
- Duota $a + b + c = k$. Bene vienintelis naudingas keitinys būtų $a = \frac{xk}{x+y+z}$, $b = \frac{yk}{x+y+z}$, $c = \frac{zk}{x+y+z}$, tačiau neribokime savo fantazijos: $a = \frac{kx(x+2y)}{(x+y+z)^2}$, $b = \frac{ky(y+2z)}{(x+y+z)^2}$, $c = \frac{kz(z+2x)}{(x+y+z)^2}$ ir pan..
- Duota $ab + bc + ac = k$. Kintamuosius galime keisti poromis: $bc = \frac{xk}{x+y+z}$, $ac = \frac{yk}{x+y+z}$, $ab = \frac{zk}{x+y+z}$.

Žinoma, kai turime daugiau kintamųjų, reikės sugalvoti analogiškų keitinių, tačiau nereiktų persistengti - dažnai tokie keitiniai tik „subjauroja" nelygybę ir ji tampa tik dar labiau komplikuota.

Pavyzdys 23. *Tegu a, b, c - tokie teigiami skaičiai, kad $abc = 1$. Įrodykite nelygybę*

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geqslant 1.$$

Sprendimas. Pakeiskime $a = \frac{yz}{x^2}$, $b = \frac{xz}{y^2}$, $c = \frac{xy}{z^2}$. Nelygybė tampa:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\frac{y^2z^2}{x^4} + \frac{yz}{x^2} + 1} \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{x^4}{y^2z^2 + x^2yz + x^4} \geqslant 1.$$

O pagal Cauchy-Schwarz ir AM-GM nelygybes:

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{x^4}{y^2z^2+x^2yz+x^4} &\geqslant \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+\sum_{cyc}x^2y^2+\sum_{cyc}yzx^2}\\ &\geqslant \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+\sum_{cyc}x^2y^2+\sum_{cyc}\frac{1}{2}(x^2y^2+x^2z^2)}\\ &= \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+2\sum_{cyc}x^2y^2}=1.\end{aligned}$$

△

Normalizacija yra tarsi priešingas dalykas homogenizacijai. Tegu $N(a_1, a_2, ..., a_n) \geqslant 0$ - homogeninė nelygybė. Pagal homogeniškumo apibrėžimą, pakeitę $a_i = tx_i$ visiems i, kur t - teigiamas skaičius gausime, $N(a_1, a_2, ..., a_n) = t^n N(x_1, x_2, ..., x_n)$. Vadinasi, liks įrodyti $N(x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant 0$, kur visi x_i yra proporcingai norimai stipriai padidėję/sumažėję. Tai reiškia, kad naujos kintamųjų aibės savybės (suma, sandauga, kvadratų suma, ir pan.) yra pasikeitę. Niekas nedraudžia juos mažinti tiek, kad jų suma, sandauga ar dar kokia aibės savybė būtų lygi konkrečiam, mūsų pasirinktam dydžiui.

Pavyzdžiui, jei norime įrodyti homogeninę nelygybė nuo trijų teigiamų kintamųjų $f(a, b, c) \geqslant 0$, nemažindami bendrumo galime tarti, kad $ab + bc + ac = 3$. Tuomet, naudodami AM-GM ir kitas nelygybes galime nustatyti kitų kintamųjų aibės savybių ribas: $3 = ab + bc + ac \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leqslant 1$, $3 = ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2$, $9 = 3(ab + bc + ac) \leqslant (a + b + c)^2 \Rightarrow a + b + c \geqslant 3$.

Pavyzdys 24 (Nesbitt'o nelygybė)**.** *Įrodykite, kad teigiamiems skaičiams galioja*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Sprendimas. Nelygybė yra homogeninė. Nemažindami bendrumo tariame, kad $a + b + c = 1$. Žinome, kad

$$ab+bc+ac\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}.$$

Tuomet

$$\frac{3}{2}=3-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}\leqslant 3-\frac{9}{2}(ab+bc+ac).$$

Reiškia, liks įrodyti

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant 3-\frac{9}{2}(ab+bc+ac)$$

arba

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{9a(b+c)}{4}\geqslant 3.$$

Na o pagal AM-GM nelygybę:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{9a(b+c)}{4}\geqslant\sum_{cyc}2\sqrt{\frac{a\cdot 9a(b+c)}{4(b+c)}}=3\sum_{cyc}a=3.$$

$\triangle$

Pavyzdys 25. *Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c galioja nelygybė*

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8}}.$$

Sprendimas. Nelygybė homogeninė, tad neprarasdami bendrumo tariame, kad $ab + bc + ac = 3$. Tada KAIRĖ PUSĖ $= 1$. Be to, pagal AM-GM nelygybę galime nesunkiai rasti, kad $a + b + c \geqslant 3$ ir $abc \leqslant 1$. Žinodami tapatybę, nelygybę pertvarkome:

$$(a+b)(b+c)(a+c) = (a+b+c)(ab+bc+ac) - abc = 3(a+b+c) - abc \geqslant 8.$$

Tuomet DEŠINĖ PUSĖ $\geqslant 1 =$ KAIRĖ PUSĖ, ką ir reikėjo įrodyti. $\triangle$

Algebriniai ir trigonometriniai keitiniai

Visi kiti nei anksčiau aprašyti algebriniai keitiniai yra grynas fantazijos reikalas. Būdami itin paprasti, jie dažnai labai stipriai palengvina darbą.

Pavyzdys 26 (Nguyen Van Thach)**.** *Tegu a, b, c - teigiami realieji skaičiai. Įrodykite, kad jiems galioja nelygybė*

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+abc} + \frac{b^3}{b^3+c^3+abc} + \frac{c^3}{c^3+a^3+abc} \geqslant 1.$$

Sprendimas. Pakeiskime $\frac{b}{a} = x$, $\frac{c}{b} = y$, $\frac{a}{c} = z$ ir pastebėkime, kad tada $xyz = 1$. Tuomet:

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+abc} = \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}} = \frac{1}{1+x^3+\frac{x}{z}} = \frac{xyz}{xyz+x^3+x^2y} = \frac{yz}{yz+x^2+xy}.$$

Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\sum_{cyc} \frac{yz}{yz+x^2+xy} \geqslant \frac{(xy+xz+yz)^2}{\sum_{cyc} yz(yz+x^2+xy)}.$$

Taigi, lieka įrodyti

$$(xy+yz+xz)^2 \geqslant \sum_{cyc} yz(yz+x^2+xy).$$

Nepabijoję reiškinio išskleisti matysime, kad tai yra tapatybė. $\triangle$

Pavyzdys 27 (St. Petersburg 2009)**.** *Duotiems teigiamiems realiesiems skaičiams galioja sąryšis $a+b+c = ab+bc+ac$. Įrodykite, kad jiems galioja nelygybė*

$$a+b+c+1 \geqslant 4.$$

Įrodymas pagal Mathias Tejs Knudsen. Jei $a+b<1$, tai $a+b+c=ab+bc+ca=c(a+b)+ab<c+(a+b)(a+b)<c+a+b$ ir gauname prieštarą. Taigi $a+b\geqslant 1$ ir analogiškai $b+c\geqslant 1$ bei $a+c\geqslant 1$. Įveskime keitinį $a=x+\frac{1}{2}$, $b=y+\frac{1}{2}$, $c=z+\frac{1}{2}$, tuomet duota sąlyga taps $ab+bc+ac=\frac{3}{4}$. Ankščiau gautas rezultatas bus ekvivalentus $x+y\geqslant 0$, $x+z\geqslant 0$, $y+z\geqslant 0$, vadinasi ne daugiau kaip vienas iš skaičių x,y,z yra neigiamas. Pakeitus, pagrindinė nelygybė pavirsta į

$$8xyz \leqslant 1.$$

Jei vienas iš x,y,z yra neigiamas, nelygybė akivaizdi, o jei visi teigiami - pagal AM-GM nelygybę:

$$\frac{3}{4}=xy+yz+xz\geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Leftrightarrow 8xyz\geqslant 1.$$

△

Pastaba. Keitinys $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ šiuo atveju irgi labai padėtų, nes tuomet duota sąlyga nepasikeistų, o pagrindinė nelygybė įgytų kitokią, galbūt, patogesnę formą, bet tai jau visai kitas sprendimas.

Užuominos į trigonometrinius keitinius gali būti labai įvairios: sąlyga, jog kintamieji yra intervale $[0,1]$, arba konstrukcija $\sqrt{1-x^2}$ sufleruoja apie sinusus, kosinusus, o algebrinė konstrukcija $\sqrt{1+x^2}$ - tipinis tangeto ar kotangento taikymo atvejis, kadangi $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=|\cos x|$ ir $\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}=|\sin x|$.

Pavyzdys 28 (Latvia 2002)**.** *Teigiami realieji skaičiai a,b,c,d tenkina*

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1.$$

Įrodykite, kad tada teisinga yra nelygybė $abcd\geqslant 3$.

Sprendimas. Pakeiskime $a^2=\tan A$, $b^2=\tan B$, $c^2=\tan C$, $d^2=\tan D$, kur $A,B,C,D\in(0,\frac{\pi}{2})$. Žinodami, kad $\tan^2\Theta+1=\frac{1}{\cos^2\Theta}$, pertvarkome duotą sąlygą į

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D=1.$$

Pagrindinė nelygybė tampa

$$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\cdot\tan D\geqslant 9.$$

Pagal AM-GM nelygybę:

$$\begin{cases}\sin^2 A=1-\cos^2 A=\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D\geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D}\\ \sin^2 B=1-\cos^2 B=\cos^2 C+\cos^2 D+\cos^2 A\geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 C\cos^2 D\cos^2 A}\\ \sin^2 C=1-\cos^2 C=\cos^2 D+\cos^2 A+\cos^2 B\geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 D\cos^2 A\cos^2 B}\\ \sin^2 D=1-\cos^2 D=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geqslant 3\sqrt[3]{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}\end{cases}$$

Viską sudauginę gausime reikiamą rezultatą. △

Pokštai su trikampiu

Dažnai, ypač rimtesnėse olimpiadose, yra mėgiami uždaviniai, susiejantys kelias matematikos disciplinas. Šiame mažame skyrelyje nagrinėsime algebros ir geometrijos junginį: nelygybes trikampio kraštinėms.

Pagrindinis dalykas, naudingas žinoti įrodinėjant nelygybę trikampio kraštinėms, yra trikampio nelygybė: bet kurių dviejų kraštinių ilgių suma yra didesnė už likusiosios ilgį.

Pavyzdys 29 (Pham Kim Hung)**.** *Duoto trikampio kraštinių ilgiai yra a, b, c. Įrodykite, kad galioja*

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{a+c-b}}\geqslant\frac{9}{ab+bc+ac},$$

kai trikampio perimetras 3.

Pirmas įrodymas. Pažymekime $x=\sqrt{a+b-c}$, $y=\sqrt{b+c-a}$, z=$\sqrt{a+c-b}$, tuomet $a^2+b^2+c^2=3$, o nelygybė pavirs į

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{36}{(x^2+y^2+z^2)^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}. \qquad \text{(Įsitikinkite!)}$$

Kas yra ekvivalentu

$$(xy+xz+yz)(9+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)\geqslant 36xyz.$$

Pagal trikampio nelygybę, gauname, kad x, y, z - teigiami skaičiai, taigi, jiems galime taikyti AM-GM nelygybę. Iš tikrųjų: sudauginus

$$xy+xz+yz\geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

ir

$$9+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\geqslant 12\sqrt[12]{x^4y^4z^4}$$

gausime reikiamą rezultatą. □

Ypač fantastiškas yra Ravi keitinys: žinome, kad į trikampį ABC įbrėžus apskritimą, kuris kraštines AB, BC ir AC liečia atitinkamai taškuose X, Y ir Z, gausime $AX=AZ=p$, $BX=BY=r$ ir $CY=CZ=s$. Tuomet $AB=p+r$, $BC=r+s$ ir $AC=p+s$. Akivaizdu, kad p, r, s - teigiami dydžiai. Toks keitinys atriša sprendėjui rankas nuo trikampio ir leidžia dirbti su bet kokiais teigiamais skaičiais.

Antras įrodymas. Atlikime Ravi keitinį: $a=p+r$, $b=r+s$, $c=p+s$. Turėsime $p+r+s=\frac{3}{2}$. Pagrindinė nelygybė taps:

$$\frac{1}{\sqrt{2p}}+\frac{1}{\sqrt{2r}}+\frac{1}{\sqrt{2s}}\geqslant\frac{9}{(p+r+s)^2+pr+rs+ps}.$$

Tai yra ekvivalentu

$$(\frac{9}{4}+pr+rs+ps)(\sqrt{ps}+\sqrt{pr}+\sqrt{ps})\geqslant 9\sqrt{2}\cdot\sqrt{prs}.$$

Pagal AM-GM nelygybę:

$$\frac{9}{4}+pr+rs+ps \geqslant 12\sqrt[12]{\frac{1}{4^9}\cdot p^2r^2s^2}$$

ir

$$\sqrt{ps}+\sqrt{pr}+\sqrt{ps} \geqslant 3\sqrt[3]{prs}.$$

Šias dvi sudauginame ir gauname tai, ką ir reikėjo įrodyti. □

Cauchy Reverse Technique

Tokį įspūdingą pavadinimą gali turėti nebent koks nors labai sudėtingas ir niekam nereikalingas matematinis metodas. Taip jau atsitiko, kad būtent šitaip yra vadinamas itin paprastas ir tuo genialus nelygybių sprendimo būdas.

Kai turime nelygybę, ir mums tiesiog niežti rankas pritaikyti AM-GM nelygybę, bet to padaryti negalime, nes nelygybės ženklas yra priešingas, atliekame paprastą triuką: Iš trupmenos iškeliame sveikąją dalį, kuri yra didesnė už pradinė trupmeną. Tada prie naujo trupmeninio „likučio” gausime minusą ir galėsime išlieti savo energiją ir pyktį pritaikydami AM-GM nelygybę. Nematant, kaip tai vyksta iš tikrųjų, pagal aprašyma tai atrodo visiškai nesuprantama, tad pereikime prie pavyzdžių, kurie spalvingai iliustruos mintį.

Pavyzdys 30. *Įrodykite, kad su teigiamais realiaisiais skaičiais teisinga nelygybė*

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2d^3}+\frac{d^4}{d^3+2d^3} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3}.$$

Sprendimas. Pertvarkykime kairės pusės dėmenis, kad jie taptų „apversti” ir iškart taikykime AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^3+2b^3} &= \sum_{cyc}\frac{a^4+2ab^3-2ab^3}{a^3+2b^3} = a+b+c+d-\sum_{cyc}\frac{2ab^3}{a^3+2b^3}\\ &\geqslant a+b+c+d-\sum_{cyc}\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{a^3b^6}} = a+b+c+d-\frac{2}{3}(a+b+c+d)\\ &= \frac{a+b+c+d}{3}.\end{aligned}$$

△

Pavyzdys 31. *Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems a, b, c, kur $a+b+c=3$, galioja nelygybė*

$$\frac{1}{1+2b^2c}+\frac{1}{1+2c^2a}+\frac{1}{1+2a^2b} \geqslant 1.$$

Įrodymas. Partvarkome ir du kartus taikome AM-GM nelygybę (stebuklinga, kad galime taikyti AM-GM nelygybę toje pačioje nelygybėje ir mažėjančia, ir didėjančia puse):

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{1}{1+2b^c} &= \sum_{cyc}\frac{1+2b^2c-2b^2c}{1+2b^2c}\\ &\geqslant 3-\sum_{cyc}\frac{2b^2c}{3\sqrt[3]{b^4c^2}}=3-\sum_{cyc}\frac{2\sqrt[3]{b^2c}}{3}\\ &\geqslant 3-\sum_{cyc}\frac{2(2b+c)}{9}=3-\frac{2\cdot 3(a+b+c)}{9}=1.\end{aligned}$$

□

Uždaviniai

1. [Romania Junior TST 2003] Įrodykite, kad teigiami realieji skaičiai, tenkinantys $abc=1$, taip pat tenkina ir *S*
$$1+\frac{3}{a+b+c}\geqslant\frac{6}{ab+bc+ac}.$$

2. [Clock-Tower School Junior Competition 2009] Teigiami realieji skaičiai a,b,c tenkina $abc=8$. Įrodykite, kad jiems taip pat galioja nelygybė *S*
$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leqslant 0.$$

3. [Zhautykov Olympiad 2008] Įrodykite, kad teigiamiems realiesiems skaičiams, kurie tenkina $abc=1$, galioja nelygybė *S*
$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

4. Įrodykite nelygybę, kuri galioja su teigiamais realiaisiais a,b,c,d: *S*
$$\tfrac{a}{b^2+c^2+d^2}+\tfrac{b}{c^2+d^2+a^2}+\tfrac{c}{d^2+a^2+b^2}+\tfrac{d}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\tfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}.$$

5. [USAMO 2003] Įrodykite nelygybę, kuri teisinga su teigiamais realiaisiais a,b,c: *S*
$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{c^2+(a+b)^2}\leqslant 8.$$

6. [Korea 1998] Teigiami realieji skaičiai tenkina sąryšį $x+y+z=xyz$. Įrodykite, kad jiems galioja nelygybė *S*
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

7. [*Crux Mathematicorum*] Parodykite, kad teigiamiems realiesiems skaičiams, kurie tenkina $abcde=1$, galioja *S*

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}+\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\geqslant\frac{10}{3}.$$

8. [George Tsintifas, *Crux Mathematicorum*] Įrodykite nelygybę teigiamiems realiesiems skaičiams: *S*

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+d)^3(d+a)^3\geqslant 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4.$$

9. [Romania Junior TST 2002] Skaičiai a,b,c priklauso intervalui $[0,1]$. Įrodykite, kad jiems galioja nelygybė *S*

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1.$$

10. [IMO 1983]. Įrodykite, kad trikampio kraštinės a,b,c tenkina nelygybę *S*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

11. [Samin Riasat] Įrodykite, kad trikampio kraštinės a,b,c tenkina nelygybę *S*

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\geqslant 1.$$

12. Įrodykite, kad trikampio kraštinės tenkina nelygybę *S*

$$\sqrt{3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)}\geqslant\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a+c-b}+\sqrt{b+c-a}.$$

13. [Bulgaria TST 2003] Duoti teigiami realieji skaičiai a,b,c tenkina $a+b+c=3$. Įrodykite, kad jiems teisinga nelygybė *S*

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

14. [Pham Kim Hung] Duoti tokie teigiami skaičiai a,b,c,d, kad $a+b+c+d=4$. Įrodykite, kad jie tenkina nelygybę *S*

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geqslant 2.$$

15. Duoti n teigiamų skaičių $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, kurių kvadratų suma lygi n. Įrodykite, kad jiems galioja nelygybė *S*

$$\frac{1}{a_1^3+2}+\frac{1}{a_2^3+2}+\frac{1}{a_3^3+2}+\ldots+\frac{1}{a_n^3+2}\geqslant\frac{n}{3}.$$

16. Turime skaičius a,b,c, kurių suma lygi 3. Įrodykite, kad jiems taip pat galios nelygybė *S*

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geqslant 4.$$

17. [Pham Kim Hung] Parodykite, kad teigiamiems realiesiems skaičiams a,b,c, kurie tenkina $a^2+b^2+c^2=1$, galioja *S*

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqslant 3.$$

18. Tegu a,b,c bus tokie teigiami skaičiai, kad $a+b+c=1$. Parodykite, kad teisinga *S*

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\geqslant 1.$$

2.1.5 Drakonų puota

Iš tamsiausių kerčių, tolimiausių užkampių susirinko jos ir jie pasirodyti vieni kitiems. Ne jėgos, o savo žaižaruojačios išvaizdos parodyti, emocijomis pasidalinti atvyko. Kiekvienas svečias laukiamas, kiekvieno istorija ypatinga. Ir suksis jie valso ritme iki ryto, kol giedoriai gaidžiai paskelbs puotos pabaigą. Kai drakonai atsisveikinę pakils skrydžiui namo, liks čia jų letenų įspaudai, nagų dryžiai ir neatsargių kostelėjimų apdegintų užuolaidų likučiai, bylojantys apie šių įspūdingų padarų egzistavimą. Kas žino, galbūt kada nors kas nors galės regėti nors vieną jų dvikovoje su piktu burtininku, kada degs žemė, užvirs vandenynai, o dangus apsitrauks ledu.

Šiame skyrelyje skaitytoją supažindinsime su dar keliomis nelygybėsmis, kurios uždavinių sprendimuose pasitaiko išskirtinai retai. Ne dėl to, kad šios nelygybės yra silpnos ar neuniversalios, priešingai: dėl to, kad sunkių uždavinių yra gerokai mažiau nei lengvųjų. Tai bus tik pažintinis skyrelis, siekiantis parodyti artimiausias fantastikai teormas-nelygybes, todėl nepateiksime nei pavyzdžių, nei uždavinių, tik keletą taikymo komentarų ir leisime skaitytojui pasinerti į savą vaizduotę.

Teorema (Hölder)**.** *Tegu* $\{a_{11}, \ldots, a_{n1}\}$*,* $\ldots$*,* $\{a_{1k}, \ldots, a_{nk}\}$ *bus* k *skaičius aibių, kur kiekviena jų turi po* n *teigiamų elementų, o* $\{p_1, \ldots, p_k\}$ *bus teigiamų skaičių aibė, kurios visų elementų suma lygi 1. Tuomet*

$$(a_{11} + \ldots + a_{n1})^{p_1} \ldots (a_{1k} + \ldots + a_{nk})^{p_k} \geqslant a_{11}^{p_1} \ldots a_{1k}^{p_k} + \ldots + a_{n1}^{p_1} \ldots a_{nk}^{p_k},$$

arba

$$\prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)^{p_j} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} a_{ij}^{p_j} \right).$$

Komentarai ir taikymas. Dažniausiai yra taikoma forma, kai visi p_j yra lygūs, tačiau įspūdingiausiai nelygybė „dirba”, kai jie yra skirtingi. Pastebėkime, kad kai $k = 2$, o $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, gauname Cauchy-Schwarz nelygybę, o ir visa Hölder nelygybės forma yra tarsi Cauchy-Schwarz nelygybės apibendrinimas.

Teorema (Chebyshev)**.** *Jei turime tokias aibes* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ *ir* $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$*, tai*

$$\tfrac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n} \geqslant \tfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \tfrac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \geqslant \tfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_2+a_nb_1}{n}.$$

Teorema (Minkowski)**.** *Jei turime teigiamų skaičių sekas* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *ir* $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$*, o* $p > 0$*, tai*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema (Schur)**.** *Tarkime, kad* a, b, c *- neneigiami skaičiai, o* $r > 0$*. Tada*

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

Lygybė galios tada ir tik tada, kai $a = b = c$ *arba du iš jų lygūs, o trečiasis lygus 0.*

Komentarai ir taikymas. Kai $r = 1$, gausime $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$, kas yra viena dažniausių Schur'o nelygybės taikymo formų.

Teorema (Perstatų nelygybė)**.** *Turime aibes* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ *ir* $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$*. Tada kiekvienai aibės* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *perstatai* π *galios*

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_{\pi(1)} + \ldots + a_nb_{\pi(n)} \geqslant a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n.$$

Lygybės pirmu ir antru atveju galios atitinkamai tada, kai aibės perstata π *bus griežtai mažėjanti ir griežtai didejanti.*

Komentarai ir taikymas. Įrodinėjant ciklines ar simetrines nelygybes, visada galima nemažinant bendrumo apsibrėžti, kokie yra kintamųjų sąryšiai tarpusavyje (pvz. jei yra ciklinė nelygybė nuo a, b, c, tai galime sakyti, kad $a \leqslant b \leqslant c$ ar panašiai). Tai leis suformuoti reikiamas nemažėjančias sekas, kurioms galiotų perstatų nelygybė.

Teorema (Jensen)**.** *Tegu* $f : A \to \mathbb{R}$ *bus iškila (angl. convex) funkcija. Tada bet kokiems* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ *ir neneigiamiems* $w_1, w_2, \ldots, w_n$*, kurių suma teigiama, galios*

$$w_1f(x_1) + \ldots + w_nf(x_n) \geqslant (w_1 + \ldots + w_n)f\left(\frac{w_1x_1 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + \ldots + w_n}\right).$$

Kai f *yra išgaubta (angl. concave), galioja atvirkščia nelygybė.*

Komentarai ir taikymas. Funkcija intervale yra iškila, jei jos antros eilės išvestinė tame intervale yra ne mažiau už 0, arba išgaubta, jei ne daugiau už 0. Na o praktiškai tą galima pamatyti funkcijos grafike: iškilos funkcijos grafikas tame intervale savo forma bus „panašus" į funkcijos $y = x^2$ grafiką, o išgaubtos - į funkcijos $y = -x^2$ grafiką. Teoremos idėją galime suformuluoti taip: iškilos funkcijos reikšmių vidurkis yra ne mažesnis už funkcijos nuo argumentų vidurkio reikšmę. Išgaubtai funkcijai, žinoma, atvirkščiai. Taikant šią nelygybę, dažniausiai $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1$.

2.2 Funkcinės lygtys

Dauguma suprantame, ką reiškia išspręsti lygtį. Tai yra rasti visus užrašytos lygybės sprendinius ir įrodyti, kad daugiau jų nėra. Išspręsti funkcinę lygtį reiškia beveik tą patį - rasti visas funkcijas, tenkinančias lygybę ir įrodyti, kad daugiau tokių nėra. Daugumos funkcinių lygčių sprendimai turi panašų pobūdį - manipuliuojama duota lygtimi siekiant gauti kuo daugiau apribojimų tikėtiniems sprendiniams. Sėkmės atveju, apribojimų pakanka ir galima nusakyti sprendinių aibę (kartais ji būna tuščia) bei patikrinti, kad išties visos rastos funkcijos yra sprendiniai. Pirmąjame skyrelyje supažindinsime su pačia pagrindine sprendimo idėja - fiksuotų reikšmių įstatymu vietoje kintamųjų funkcinėje lygtyje. Antrąjame parodysime, kaip iš duotos lygties gauti informacijos apie funkcijos tipą (pvz. lyginumą, monotoniškumą, injektyvumą), bei kaip ją pritaikyti. Trečiąjame išspręsime žymiąją Cauchy funkcinę lygtį ir panaudosime ją spręsdami sudėtingesnius uždavinius.

2.2.1 Įsistatykime $x = 0$

Nieko nelaukdami užsirašykime pirmąją funkcinę lygtį:

Pavyzdys 1. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį*

$$f(x + y) = f(x)$$

su visais realiaisiais x ir y, bei lygybę $f(0) = 0$.

Šios funkcinės lygties sąlyga susideda iš keturių dalių. Apžvelkime jas:

- Ieškomų funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritys. Šiuo atveju duota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, t.y. sprendinių reikia ieškoti tarp visų funkcijų apibrėžtų realiuosiuose skaičiuose ir su realiomis reikšmėmis.
- Lygtis, kurią turi tenkinti ieškomos funkcijos.
- Lygtyje dalyvaujančių kintamųjų kitimo sritys. Šiuo atveju duota, kad lygtį funkcijos turi tenkinti su visomis realiomis x ir y reikšmėmis
- Papildomos sąlygos. Šiuo atveju duota, kad reikia ieškoti tik tų lygties sprendinių, kurie papildomai tenkina $f(0) = 0$.

Sprendimas. Įsistatykime $x = 0$, gausime $f(y) = f(0) = 0$, t.y. $f(y) = 0$ su visais $y \in \mathbb{R}$. Patikrinę gauname, kad sprendinys tinka. $\triangle$

Sprendimas trumpesnis už sąlygą, tad su nespėjusiais pastebėti, kaip jis pralekė, pasižiūrėkime sulėtintą kartojimą. Sąlygoje duota, kad ieškomos funkcijos turi tenkinti lygtį $f(x + y) = f(x)$ su visomis realiosiomis x ir y reikšmėmis. Vadinasi, turės tenkinti lygtį ir kai vienam iš kintamųjų parinksime konkrečią reikšmę, ką paprastai įvardijome kaip „įstatykime $x = 0$". Toliau, žinodami, kad ieškomos funkcijos turi su visomis realiomis y reikšmėmis tenkinti lygtį $f(y) = f(0)$, bei kad ieškomos funkcijos turi tenkinti papildomą sąlygą $f(0) = 0$, darome išvadą, kad ieškomos funkcijos turi su visomis realiosiomis y reikšmėmis tenkinti $f(y) = 0$. Tačiau ši sąlyga yra tokia stipri, kad ji nurodo vieną vienintelę funkciją! Lieka patikrinti, ar ji yra sprendinys. Kadangi visuose realiuose taškuose ji įgyja reikšmę 0, tai įstatę ją į lygtį gausime akivaizdžiai teisingą lygybę $0 = 0$. Lygtis išspręsta.

Įsistatyti vietoje vieno ar kelių kintamojų nulį yra dažniausiai pasitaikanti funkcinių lygčių sprendimo idėja, nuo kurios neretai verta pradėti spręsti nematytą lygtį. Tačiau reikia turėti omenyje, kad retai kada vien šio triuko užteks, tad svarbu turėti ir kitų ginklų. Pavyzdžiui:

Pavyzdys 2. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios tenkina lygtį*

$$f(x + y) = f(x^2 + y^2)$$

su visais realiaisiais x ir y.

Sprendimas. Įsistatykime $x = y$, gausime $f(2y) = f(2y^2)$. Įsistatykime $x = -y$, gausime $f(0) = f(2y^2)$. Abi lygybės turi galioti su visomis realiosiomis y reikšmėmis, tad galime jas sujungti: $f(2y) = f(0)$. Lieka įsižiūrėjus konstatuoti, kad ieškomos funkcijos visuose realiuose taškuose įgis tą pačią reikšmę kaip ir taške 0. Tokių funkcijų be galo daug, ir jos įprastai užrašomos $f(x) = c$, kur c - bet kuris iš realiųjų skaičių (dar vadinamas konstanta). Lieka patikrinti, ar visos tokios funkcijos tinka. Įstatę gausime $c = c$, vadinasi tinka. △

Naudodami šias paprastas nulio ir $x = y$ įsistatymo idėjas išspręskime dar keletą lygčių. Atkreipsime dėmesį į tai, kad labai svarbi dalis yra teisingai interpretuoti gautą po įsistatymo lygybę. Kartais ji būna bevertė, o kartais sujungus su kažkuo papildomu galima gauti ką nors naudingo. Sunkesniuose uždaviniuose tai ne visuomet pavyksta, tad verta apsišarvuoti kantrybe ir bandyti įsistatyti įvairias kintamųjų reikšmių kombinacijas.

Pavyzdys 3. [LitKo 2008] *Raskite visas tokias realiąsias funkcijas f, kad $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ su visomis realiųjų skaičių x ir y poromis.*

Sprendimas. Įsistatykime $x = 0$ ir $y = 0$. Gausime $f(0)^2 = f(0)$, t.y. $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Panagrinėkime abu atvejus:

$f(0) = 0$ - Įsistatykime į pradinę lygtį $x = 0$, gausime $0 = y$. Ši lygybė jokiai funkcijai negalioja su visomis realiomis y reikšmėmis, todėl šį atvejį atmetame.

$f(0) = 1$ - Įsistatykime į pradinę lygti $x = 0$, gausime $f(y) = y + 1$. Patikrinę matome, kad ši funkcija tinka: $(x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = x + y$.

Gavome, kad funkcija $f(x) = x + 1$ bus vienintėlis sprendinys. △

Pavyzdys 4. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$* [1] *tenkinančias lygybę*

$$f(2u) = f(u + v)f(v - u) + f(u - v)f(-u - v)$$

su visomis realiomis u ir v reikšmėmis.

[1] $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ žymėsime visus neneigiamus realiuosius, o $\mathbb{R}^+$ visus teigiamus realiuosius skaičius.

Sprendimas. Įsistatykime $u = 0$ ir $v = 0$. Gausime $f(0) = 2f(0)^2$, t.y. $f(0) = 0$ arba $f(0) = \frac{1}{2}$. Panagrinėkime abu atvejus:

$f(0) = 0$ - Įsistatykime $u = 0$, gausime $0 = f(v)^2 + f(-v)^2$. Šią lygtį tenkina vienintėlė funkcija - $f(v) = 0$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ - Vieną kartą įsistatykime $u = 0$, kitą $u = v$, gausime dvi lygtis: $\frac{1}{2} = f(v)^2 + f(-v)^2$ ir $f(2v) = f(-2v)$. Iš jų seka, kad $\frac{1}{2} = f(v)^2 + f(v)^2 = 2f(v)^2$ ir, kadangi ieškome funkcijų įgyjančių tik neneigiamas reikšmes, $f(v) = \frac{1}{2}$.

Patikrinę matome, kad abi rastos funkcijos $f(v) = 0$ ir $f(v) = \frac{1}{2}$ tinka. △

Pavyzdys 5. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x ir y tenkina $f(x + f(y)) = x + f(f(y))$ ir $f(2004) = 2005$.*

Sprendimas. Įstatykime $y = 0$, gausime $f(x + f(0)) = x + f(f(0))$. Įsižiūrėjus į gautą lygybę tampa aišku, kad ją tenkina tiktai funkcijos $f(x) = x + c$, kur c - konstanta. Pridėjus papildomą sąlyga lieka vienintelė funkcija $f(x) = x + 1$, kuri ir yra sprendinys. △

Pasiaiškinkime kiek išsamiau, kaip iš lygybės $f(x + f(0)) = x + f(f(0))$ gauti $f(x) = x + c$. Paimkime bet kurią funkciją, kuri tenkina pirmąją lygtį. Kad ir kokia ji būtų, $f(0)$ ir $f(f(0))$ bus konretūs skaičiai, nepriklausantys nuo x. Patogumo dėlei pakeiskime $t = x + f(0)$, tuomet gausime, kad su visomis realiosiomis t reikšmėmis $f(t) = t + f(f(0)) - f(0)$. Lieka tik konkretų skaičių $f(f(0)) - f(0)$ pažymėti c. Ši nekintančių reiškinių pažymėjimo idėja yra gana dažna, tad verta ją įsidėmėti.

Uždaviniai

1. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2x^2 + 2y^2.$$

2. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(x) + f(x + y) = y + 2.$$

3. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(x) = (x - y)f((x - y + 1)x) + f(y).$$

4. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x ir y tenkina *S*

$$yf(x) = xf(y).$$

5. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x ir y tenkinančias lygtį *S*

$$f(x + f(y)) = f(x) + yf(x).$$

6. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais $x \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį *S*

$$xf(x) + f(-x) + 1 = 0.$$

7. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, 1$ tenkinančias lygtį *S*

$$f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 1 - x.$$

8. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y, t tenkina *S*

$$(x + t)f(z) = f(xz) + f(tz).$$

9. [LitMo 2000, Pan African 2003] Raskite funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visomis realiosiomis x,y reikšmėmis tenkinančias lygtį *S*

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2).$$

10. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, t tenkina *S*

$$f(x)f(t) = f(x) + f(t) + xt - 1.$$

11. [LitMo 1994] Ar egzistuoja bent viena funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkinanti lygtį *S*

$$f(f(x)) = x^3 \ ?$$

12. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(f(x - y)) = f(x) - f(y) - f(x)f(x) - xy.$$

13. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$(x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(x - y).$$

14. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(x + f(y)) = f(f(x)) + y.$$

15. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios tenkina $f(1) = 1$ ir su visais realiaisiais x, y *S*

$$f(x + y) = 3^y \cdot f(x) + 2^x \cdot f(y)$$

16. [LitMo 2008] Funkcija $f(x)$ apibrėžta teigiamiems skaičiams, įgyja teigiamąsias reikšmes ir su visais teigiamais x, y tenkina lygybę *S*

$$f(x)f(y) = f(xy) + f(\frac{x}{y}).$$

a.) Nurodykite bent tris tokias funkcijas.

b.) Įrodykite, kad $f(x) \geqslant 2$, $f(1) = 2$.

c.) Įrodykite, kad jei $f(x)$ tenkina sąlygą, tai ją tenkina ir funkcija $f^2(x) - 2$.

17. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ su visais teigiamais x ir y tenkinančias lygtį *S*
$$f(xy) = f(x + y).$$

18. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x ir y, nelygiais nuliui, tenkina *S*
$$f(x + y) = f(1/x + 1/y).$$

19. [Brazil 1993] Raskite bent vieną funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su kiekvienu $x \in \mathbb{R}$ tenkinančią *S*
$$f(0) = 0 \text{ ir } f(2x + 1) = 3f(x) + 5.$$

20. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*
$$f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y))$$

21. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkinančias lygybę $f(x)^2 = 1$ su kiekvienu $x \in \mathbb{R}$. *S*

2.2.2 Funkcijų tipai

Šioje užduotyje panagrinėsime įvarius funkcijų tipus, sutinkamus sprendžiant funkcines lygtis. Greičiausiai jau yra tekę girdėti, kas yra lyginė, nelyginė, monotoninė ar periodinė funkcija, tad per daug nesiplėsdami prisiminkime tikslius apibrėžimus.

Apibrėžimas. Funkciją $f : A \to B$, kur aibė A simetrinė nulio atžvilgiu, vadinsime lygine, jei $\forall x \in A$ teisinga $f(-x) = f(x)$, ir nelygine, jei $\forall x \in A$ teisinga $f(-x) = -f(x)$.

Apibrėžimas. Funkciją $f : A \to B$ vadinsime periodine, jei egzistuoja toks $a \in A$, kad $f(a + x) = f(x)\ \forall x \in A$.

Apibrėžimas. Funkciją $f : A \to B$ vadinsime monotonine, jei ji yra arba nedidėjanti, arba nemažėjanti, t.y. arba $f(x) \leqslant f(y)$ su visais $x > y$ $(x, y \in A)$, arba $f(x) \geqslant f(y)$ su visais $x > y$ $(x, y \in A)$.

Atkreipsime dėmesį, kad didėjanti funkcija dažniausiai reiškia nemažėjanti (ir atvirkščiai mažėjanti - nedidėjanti), todėl yra vartojami terminai *griežtai didėjanti* ir *griežtai mažėjanti*, norint pabrėžti, jog funkcija negali būti pastovi.

Vos prisiminę, lyginumą, nelyginumą, periodiškumą ir monotoniškumą iš karto paliksime nuošalyje ir pereisime prie *injektyvių* ir *surjektyvių* funkcijų nagrinėjimo. Vargu ar suklysime teigdami, kad šios dvi sąvokos yra centrinės sprendžiant kiek sudėtingesnes olimpiadose sutinkamas funkcines lygtis, tad joms skirsime labai daug dėmesio.

Injektyvumas ir surjektyvumas

Funkciją vadinsime injektyvia, jei ji kiekvieną reikšmę įgyja tik vieną kartą. Dažnai sutinkamos injektyvios funkcijos yra tiesės $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ (ypač $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$), bet nesunku rasti ir daugiau pavyzdžių: $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = e^x$. Elementariausias neinjektyvios funkcijos pavyzdys - $f(x) = x^2$. Iš ties - ji, pavyzdžiui, reikšmę 1 įgyja du kartus: $f(1) = f(-1) = 1$.

Atkreipsime dėmesį, kad nagrinėjant injektyvumą yra svarbi apibrėžimo sritis. Pavyzdžiui, nors $f(x) = x^2$ ir nėra injektyvi visoje realiųjų tiesėje, ji tokia tampa apribojus apibrėžimo sritį iki neneigiamų skaičių.

Pateiksime formalų apibrėžimą, kurį, kaip pamatysime, labai patogu tiesiogiai taikyti sprendžiant funkcines lygtis:

Apibrėžimas. Funkciją $f : A \to B$ vadinsime injektyvia, jei visiems $a, b \in A$ teisinga

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Antroji sąvoka - surjektyvumas - apibūdina funkcijas, kurios įgyja visas savo reikšmių srities reikšmes. Jei nagrinėsime funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tai surjektyviomis bus tos pačios tiesės $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$, arba, pavyzdžiui, visi nelyginio laipsnio daugianariai. Nesurjektyvios bus pavyzdžiui $f(x) = x^2$ ir $f(x) = e^x$, nes neįgyja neigiamų reikšmių.

Vėlgi, apribojus reikšmių sritį nesurjektyvi funkcija gali tapti surjektyvia, tad visada reikia aiškiai suprasti, kas tiksliai yra apibrėžimo ir kas yra reikšmių sritis kiekvienu atveju ir po kiekvieno pertvarkymo.

Formalus surjektyvumo apibrėžimas:

Apibrėžimas. Funkciją $f : A \to B$ vadinsime surjektyvia, jei kiekvienam $b \in B$ egzistuoja toks $a \in A$, kad $f(a) = b$.

Funkciją, kuri yra ir injektyvi, ir surjektyvi, vadinsime *bijektyvia*. Bijektyvi funkcija, arba tiesiog bijekcija, kiekvienam apibrėžimo srities elementui priskiria unikalų reikšmių srities elementą, ir kiekvienas reikšmių srities elementas yra priskirtas. Kaip jau žinote (arba jei ne, tai nesunku suvokti), bijektyvi funkcija turi atvirkštinę.

Panaudojimas

Panagrinėkime keletą situacijų darydami prielaidą, kad ieškoma funkcija yra injektyvi arba surjektyvi.

Pavyzdys. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį*

$$f(f(x)) = f(x).$$

Ši lygtis turi be galo daug sprendinių, kurių struktūra kiek komplikuota. Galite pabandyti juos rasti.

Kas pasikeistų, jei žinotume, kad ieškoma funkcija yra injektyvi? Pažiūrėkime - jei funkcija injektyvi, tai iš $f(a) = f(b)$ seka, kad $a = b$ su visais a, b. Šiuo atveju vietoje a stovi $f(x)$, o vietoje b stovi x, todėl iš $f(f(x)) = f(x)$ sektų $f(x) = x$ su visais x - lygtis išspręsta!

Kas atsitiktų, jei žinotume, kad mūsų ieškoma funkcija yra surjektyvi? Surjektyvi funkcija įgyja visas reiškmių srities reikšmes, šiuo atveju visus realiuosius skaičius. Jei $f(x)$ galėtų būti bet koks realus skaičius, tai tuomet pažymėję $f(x) = y$ gautume $f(y) = y$ su visais realiaisiais y - lygtis išspręsta!

Pavyzdys. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį*

$$f(x + f(y)) = f(f(x) + y).$$

Jei žinotume, kad funkcija yra injektyvi, iš karto gautume $f(x + f(y)) = f(f(x) + y) \Rightarrow x + f(y) = f(x) + y$, o tokią lygtį jau spręsti mokame. Užtenka įsistatyti, pavyzdžiui, $y = 0$ ir gauti $f(x) = x + c$, kur c bet koks realus skaičius.

Pavyzdys. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį*

$$f(x + f(y)) = f(y^2 + x^2 f(y)) + xf(x).$$

Jei žinotume, kad ieškoma funkcija injektyvi, užtektų įsistatyti $x = 0$ ir iš lygties $f(f(y)) = f(y^2)$ gauti, kad $f(y) = y^2$ su visais $y \in \mathbb{R}$. Patikrinę pastebėtume, kad ši funkcija netinka, vadinasi sprendinių nebūtų.

Pavyzdys. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkina lygtį $f(f(x) + x) = x$. Raskite $f(0)$.*

Jei žinotume, kad f yra surjektyvi funkcija, tai reikštų, kad egzistuoja toks a, kad $f(a) = 0$ (kitaip sakant - nulis yra įgyjamas). Įstatę $x = a$, gautume $f(f(a) + a) = a \Rightarrow f(0 + a) = a \Rightarrow 0 = a$, vadinasi $a = 0$, t.y. $f(0) = 0$.

Šį uždavinį galima buvo išspręsti ir kitaip - įsistačius $x = 0$ bei $x = f(0)$, tačiau idėja, kuria pasinaudojome, yra daug bendresnė ir neretai labai naudinga.

Gavimas

Pamačius, kad kartais injektyvumas ir surjektyvumas tikrai yra naudingi, kyla klausimas, kaip gauti, jog ieškomos funkcijos pasižymėtų šitomis savybėmis. Pabandykime pasiaiškinti.

Pavyzdys. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkina lygtį $f(f(x)) = x$. Įrodykite, kad ji yra injektyvi ir surjektyvi.*

Injektyvumas. Mums reikia įrodyti, kad jei $f(a) = f(b)$, tai $a = b$. Pasirodo, tai visai nesudėtinga. Jei $f(a) = f(b)$, tai ir $f(f(a)) = f(f(b))$ (funkcija nuo vienodų argumentų tikrai duoda vienodas reikšmes), bet kadangi $f(f(a)) = a$ ir $f(f(b)) = b$, tai aišku, kad $a = b$.

Surjektyvumas. Mums reikia įrodyti, kad kiekvienam a egzistuoja toks b, kad $f(b) = a$. Bet pažiūrėkime į lygtį dar kartą - jei įstatysime $x = a$ gausime $f(f(a)) = a$, t.y. f nuo kažko lygu a, vadinasi reikšmė a yra įgyjama. Šiuo atvėju, žinoma, ieškomas b bus lygus $f(a)$, bet dažniausiai mums jis nelabai įdomus - pakanka žinoti, kad egzistuoja.

Pavyzdys. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkina lygtį $f(x + f(y)) = f(x) + y$. Įrodykite, kad ji yra injektyvi ir surjektyvi.*

Injektyvumas. Mums reikia įrodyti, kad jei $f(a) = f(b)$, tai $a = b$. Pasinaudosime laisvu kintamuoju y: perrašę lygtį $y = f(x + f(y)) - f(x)$ ir vietoje y paeiliui įstatę a ir b gauname, kad dešiniosios pusės bus vienodos (nes $f(a) = f(b)$), todėl vienodomis turės būti ir kairiosios.

Surjektyvumas. Mums rekia įrodyti, kad funkcija įgyja visas reikšmes. Laisvas kintamasis y čia taip pat pravers, nes jis gali įgyti bet kokią reikšmę. Iš pažiūros lyg ir trukdo $f(x)$, bet lengvai galime jį apeiti - įstatę $x = 0$ gausime $f(f(y)) = f(0) + y$. Kadangi $f(0)$ yra skaičius, o y įgyja visas reikšmes, tai ir $f(0) + y$ įgyja visas reikšmes. Iš čia jau aišku, kad ir funkcija jas visas įgis.

Pavyzdys. *Funkcijos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkina lygtį $f(g(x)) = x$. Įrodykite, kad g yra injektyvi, o f surjektyvi.*

Jei dvi funkcijos vienoje lygtyje neišgąsdina, tai sprendimas akivaizdus. Injektyvumas - jei $g(a) = g(b)$, tai ir $f(g(a)) = f(g(b)) \Rightarrow a = b$. Surjektyvumas dar paprastesnis, mat kiekvienam a teisinga $f(g(a)) = a$, taigi f reikšmę a įgyja.

Taigi, bendru atveju, strategija paprasta. Norėdami įrodyti ieškomos funkcijos injektyvumą tariame, kad $f(a) = f(b)$, ir statomės a ir b į lygtį, tikėdamiesi kokiu nors būdu gauti $a = b$. Norėdami įrodyti surjektyvumą bandome gauti f nuo bet kokio argumento lygią reiškiniui, kuris gali įgyti visas reikšmes. Abi strategijos yra gana bendros ir atskiru atveju jas pritaikyti gali būti gana sudėtinga, tad nusiteikite pakovoti dėl šių naudingų funkcijos savybių.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 6. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visomis x ir y reikšmėmis tenkinančias*

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

Sprendimas. Įstatykime $y = -f(x)$, gausime, kad su visais x teisinga $f(0) - 2x = f(f(y) - x)$, vadinasi, funkcija surjektyvi. Įrodysime, kad funkcija yra ir injektyvi. Jei ji tokia nėra, tai egzistuoja tokie a, b, kad $f(a) = f(b)$ ir $a \neq b$. Įstatykime $y = a$ ir $y = b$, gausime

$$f(f(x) + a) = 2x + f(f(a) - x),$$

$$f(f(x) + b) = 2x + f(f(b) - x)$$

ir iš čia

$$f(f(x) + a) = f(f(x) + b).$$

Kandangi funkcija surjektyvi, tai gauname

$$f(x + a) = f(x + b) \Rightarrow f(x) = f(x + (b - a)).$$

Pažymėję $b - a = r$ gauname, kad funkcija periodinė su periodu $r \neq 0$. Tačiau įstatę $x = y = r$ į pradinę lygtį, gauname $f(f(r)) = 2r + f(f(r)) \Rightarrow r = 0$, prieštara. Gavome, kad funkcija turi būti injektyvi, ir įstatę $x = 0$ gauname $f(y) = y + c$. △

Pavyzdys 7. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį*

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x).$$

Sprendimas. Pabandykime įrodyti, kad funkcija injektyvi. Tam pasinaudosime labai elegantiška idėja - sukeisime vietomis kintamuosius:

$$f(xy + f(y)) = yf(x) + f(y).$$

Jei tarsime, kad $f(x) = f(y)$, tai gautos ir pradinės lygčių kairiosios pusės bus lygios, vadinasi, turės būti lygios ir dešiniosios:

$$xf(y) + f(x) = yf(x) + f(y) \implies f(y)(x - 1) = f(x)(y - 1).$$

Iš čia gauname, kad funkcija visas reikšmes įgyja po vieną kartą, išskyrus, galbūt, nulį (nes jei $f(x) \neq 0$, tai $f(x) = f(y) \implies x = y$).

Natūralus sprendimo tęsinys, patyrinėti, kas atsitinka, kai funkcija įgyja nulį keliuose taškuose, tad tarkime, kad $f(x_0) = 0$ ir $x_0 \neq 0$. Įsistatykime $x = x_0, y = 1$, gausime $f(1) = 0$. Įstatę $y = 1$, gausime $f(x+f(x)) = f(x)$. Jei kokiam nors taške $f(x) \neq 0$, tai, kaip jau žinome, tame taške funkcija yra injektyvi, bet tada $x+f(x) = x \implies f(x) = 0$ - prieštara. Vadinasi, jei funkcija įgyja reikšmę 0 ne tik nulyje, tai ji tapačiai lygi nuliui.

Liko išnagrinėti atvejį, kai funkcija nulį įgyja tik nulyje. Tuomet žinome, kad funkcija injektyvi. Įstatę $x = 0$ gauname $f(f(0)) = f(0) \implies f(0) = 0$, įstatę $y = 0$ gauname $f(f(x)) = f(x) \implies f(x) = x$. △

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad griežtai didėjanti funkcija yra injektyvi. Ar būtinai bijektyvi funkcija turi būti monotoniška? *S*

2. Ar funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkinanti lygtį $f(x+y) = f(x^2)+f(y^2)$ su visais $x, y \in \mathbb{R}$ gali būti injektyvi? *S*

3. Įrodykite, kad funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkinanti lygtį $f(x + y) = xf(y^2) + yf(x^2)$ yra nelyginė. *S*

4. Raskite visas lygines monotonines ir lygines injektyvias funkcijas. Raskite bent vieną lyginę surjektyvią funkciją. *S*

5. Žinome, kad $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tenkina $f(x) \leqslant 1$ su visais $x \in \mathbb{R}^+$ ir $f(x+y)f^2(y) = f(x)$. Įrodykite, kad f didėjanti. ($\mathbb{R}^+$ čia ir toliau žymi teigiamus realiuosius) *S*

6. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkina lygtį $f(xf(x)) = x$ ir yra surjektyvi. Raskite $f(1)$. *S*

7. Raskite visas didėjančias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkinančias lygtį $f(f(x)) = x$. *S*

8. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra injektyvi ir su visais x tenkina *S*

$$f(x)f(1-x) = f(ax + b).$$

Įrodykite, kad $a = 0$, $f(1 - b) = 1$ ir kad f nėra surjektyvi.

9. Raskite visas griežtai didėjančias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygybę *S*

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 2005.$$

10. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$ tenkinančias lygybę *S*

$$(x + y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x) + f(y)).$$

11. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$ tenkinančias lygybę *S*

$$(x + y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y)).$$

12. Raskite visas funkcijas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur g yra bijekcija ir kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x).$$

13. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais $x, y \in \mathbb{R}$ tenkinančias lygybę *S*

$$f(x + y + f(xy)) = f(f(x + y)) + xy.$$

14. Įrodykite, kad nėra funkcijų $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x tenkinančių lygybes *S*

$$g(f(x)) = x^3 \text{ ir } f(g(x)) = x^2.$$

15. Tegu funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x tenkina lygtį *S*

$$4f(f(x)) = 2f(x) + x$$

Įrodykite, kad $f(x) = 0$ tada ir tik tada, kai $x = 0$.

16. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ su visais $x, y \in \mathbb{R}^+$ tenkinančias lygybę *S*

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y).$$

17. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tenkinančias lygybę *S*

$$f(x+yf(x)) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

jei žinome, jog egzistuoja tik baigtinis skaičius tokių $x \in \mathbb{R}^+$, kad $f(x) = 1$.

18. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį *S*

$$f(y) + f(x + f(y)) = y + f(f(x) + f(f(y))).$$

19. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį *S*

$$f(f^2(x) + f(y)) = xf(x) + y.$$

20. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį *S*

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y.$$

21. Raskite visas funkcijas $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y, z tenkina *S*

$$f(h(g(x)) + y) + g(z + f(y)) = h(y) + g(y + f(z)) + x.$$

22. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį *S*

$$f(x^2 + xy + f(y)) = f^2(x) + xf(y) + y.$$

23. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį *S*

$$f(f(x) - f(y)) = (x-y)^2 f(x+y).$$

24. Raskite visas funkcijas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(xg(y+1)) + y = xf(y) + f(x + g(y))$$

ir

$$f(0) + g(0) = 0.$$

25. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(x^2 + f(y)) = y + xf(x).$$

26. [IMO 1992] Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x).$$

27. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visomis x ir y reikšmėmis tenkinančias *S*

$$f(x + f(xy)) = f(x + f(x)f(y)) = f(x) + xf(y).$$

28. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina *S*

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy.$$

29. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina

$$f(xf(y)) = (1 - y)f(xy) + x^2y^2f(y).$$

30. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

31. *[Japan 2008] Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį

$$f(x + y)f(f(x) - y) = xf(x) - yf(y).$$

32. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su visais realiaisiais x, y tenkinančias lygtį

$$f(x + y + f(xy)) = xy + f(x + y).$$

33. *[Brazil 2006] Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visais realiaisiais x, y tenkina

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy.$$

34. *[Dan Barbilian 2005] Tegu $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yra nelygi konstantai funkcija su visais $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tenkinanti

$$f(x)f(yf(x))f(zf(x + y)) = f(x + y + z)$$

Įrodykite, kad f yra injektyvi ir raskite visas tokias funkcijas.

35. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kurios su visais teigiamais x, y tenkina

$$f\left(\frac{f(x)}{yf(x) + 1}\right) = \frac{x}{xf(y) + 1}.$$

2.2.3 Cauchy funkcinė lygtis

Sprendžiant sudėtingas funkcines lygtis dažnai susiduriama su lygtimi:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Ši lygtis vadinama Cauchy funkcine lygtimi. Ją nesudėtinga išspręsti jei ieškosime funkcijų, kurių apibrėžimo sritis racionalieji skaičiai. Tą ir padarykime:

Teorema. *Jei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tenkina lygtį $f(x+y) = f(x)+f(y)$ su visais racionaliaisiais x ir y, tai f - tiesinė, t.y. $f(q) = kq$ visiems $q \in Q$, kur $k \in \mathbb{R}$ - konstanta.*

Įrodymas. Įstatę $y = x$, gausime $f(2x) = 2f(x)$. Įstatę $y = 2x$, gausime $f(3x) = 3f(x)$. Taip tęsdami toliau, po nesudėtingos indukcijos turėsime

$$f(nx) = nf(x).$$

Į šią lygybę įstatę $x = \frac{1}{n}$ gausime $\frac{f(1)}{n} = f(\frac{1}{n})$. Tada, pradinėje lygtyje imdami $x = \frac{1}{n}$, o $y = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ ir t.t., vėl po paprastos indukcijos išreikšime:

$$f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = f(1)\frac{m}{n},$$

kur m ir n - bet kokie natūralieji skaičiai, vadinasi, $\frac{m}{n}$ - bet koks teigiamas racionalusis. Tada, pažymėję $f(1) = k$, gausime

$$f(q) = kq,$$

kur k - realioji konstanta, o q - bet koks teigiamas racionalusis. Kita vertus, pradinėje lygtyje paėmę $y = 0$ ir $y = -x$, gausime $f(0) = 0$ ir $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, taigi, $f(q) = kq$ bus lygties sprendinys ir neigiamiems racionaliesiems. $\square$

Deja, jei pradinę salygą $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ pakeisime į $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tai Cauchy funkcinę lygtį išspręsti pasidarys labai sudėtinga. Racionaliesiems skaičiams ir toliau galios $f(q) = kq$, tad būtų visai natūralu manyti, kad $f(x) = kx$ visiem realiesiems x, tačiau įrodyta, kad egzistuoja begalybė labai neelementarių, netiesinių sprendinių. Jų egzistenciją priimsime be įrodymo ir žvilgtelsime į labai svarbią šių sprendinių savybę:

Teorema. *Tarkime, turime funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kuri tenkina Cauchy funkcinę lygtį ir $f(q) = q$ visiems $q \in \mathbb{Q}$, o kažkokiam $\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) \neq \alpha$. Duoti trys skaičiai $x, y, r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, $x \neq y$. Jei (x, y) pažymėsime apskritimo centro kordinates, o r - jo spindulį, tai nesvarbu, kokius x, y, r parinksime, tame apskritime visados galėsime rasti funkcijos f grafiko tašką.*

Įrodymas. Tarkime, kad $f(\alpha) = \alpha + \delta$, $\delta \neq 0$. Pažymėkime $\beta = \frac{y-x}{\delta}$. Aišku, kad įmanoma pasirinkti tokį racionalų skaičių $b \neq 0$, kad: $|\beta - b| < \frac{r}{2|\delta|}$, ir tokį racionalų skaičių a, kad: $|\alpha - a| < \frac{r}{2|b|}$. Pažymėkime $X = x + b(\alpha - a)$. Tada

$$\begin{aligned}
f(X) &= f(x + b(\alpha - a)) \\
&= x + bf(\alpha) - bf(a) \\
&= y - \delta\beta + b(\alpha + \delta) - ba \\
&= y + b(\alpha - a) - \delta(\beta - b).
\end{aligned}$$

Aišku, kad $x - r < X < x + r$ ir $y - r < f(X) < y + r$, todėl taškas $(X, f(X))$ bus mūsų apskritimo viduje. $\square$

Pastaba. Nors teoremą įrodėme tik atveju, kai $f(q) = q$ visiems $q \in \mathbb{Q}$, nesunku įsitikinti, kad teorema galios ir bendru atveju, kai $f(q) = kq$.

Jei sugebėtume nupiešti Cauchy lygties netiesinio sprendinio grafiką, tokio grafiko taškų galėtume rasti, kur tik sugalvotume, visoje begalinėje plokštumoje - išties labai žavu ir gražu, bet taip pat aišku, kad rimtai sprendžiant uždavinius, geriau su šiais sprendiniais neprasidėti. Jei turime funkciją iš realiųjų į realiuosius ir lygtis susiveda į Cauchy lygtį, reikia ieškoti kažkokių papildomų sąlygų, kurios leistų atmesti „žaviuosius" Cauchy lygties sprendinius.

Papildomos sąlygos

Naudodamiesi paskutiniąja teorema nesunkiai galime sugalvoti keletą sąlygų, leisiančių atmesti imantriuosius netiesinius sprendinius. Tarkime, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - funkcija visiems realiesiems tenkinanti Cauchy funkcinę lygtį. Tada:

Teorema. *Jei egzistuoja intervalas (a, b), kuriame funkcija f aprėžta (t.y. $f(x) > m$ arba $f(x) < M$ su visomis $x \in (a, b)$ reikšmėmis, m, M - konstantos), tai f - tiesinė.*

Įrodymas. Iš tikrųjų, iš antrosios teoremos seka, kad jei f - netiesinė, tai ji gali bet kuriame intervale įgyti reikšmę iš bet kokio mūsų norimo intervalo, vadinasi, jei f yra apribota kažkokiame intervale, tai ji gali būti tik tiesinė. $\square$

Teorema. *Jei egzistuoja intervalas, kuriame f yra monotoninė, tai f - tiesinė.*

Įrodymas. Jei f - monotoninė kažkokiame intervale (jei intervalas neuždaras, tai galime paimti kokią nors jo uždarą dalį), tai tame intervale ji bus ir aprėžta - egzistuos jos maksimumas arba minimumas, taigi, ji gali būti tik tiesinė. $\square$

Teorema. *Jei egzistuoja intervalas, kuriame f yra tolydi, tai f - tiesinė.*

Įrodymas. Jei f - tolydi kažkokiame intervale (jei intervalas neuždaras, tai galime paimti kokią nors jo uždarą dalį), tai tame intervale ji ir aprėžta, taigi, ji gali būti tik tiesinė. $\square$

Trys pastarosios teoremos - klasikiniai, gerai žinomi faktai. Naudojant jas kokioje nors rimtoje olimpiadoje įrodyti jų nebūtina.

Pavyzdžiai

Pavyzdys 8. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis racionaliųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$.*

Sprendimas. Pakeiskime - $f(x) = g(x) + \frac{x^3}{3}$. Įstatę į pradinę lygtį gausime $g(x + y) = g(x) + g(y)$, t.y. Cauchy funkcinę lygtį racionaliesiems skaičiams. Gauname $g(x) = kx$, kur k - kažkokia realioji konstanta, o tada $f(x) = kx + \frac{x^3}{3}$. $\triangle$

Pavyzdys 9. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(x+y) = f(x)+f(y)$, ir su visais $x \neq 0$ tenkina $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$.*

Sprendimas. Turime Cauchy funkcinę lygtį realiesiems skaičiams, taigi, iš duotosios sąlygos $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$ reikia išpešti ką nors naudingo. Iš šios sąlygos išplaukia, kad $f(x)$ ir $f(\frac{1}{x})$ yra vienodo ženklo, t.y. abu neigiami arba teigiami. Įstatę į Cauchy lygti $y = \frac{1}{x}$ gausime:

$$|f(x+\frac{1}{x})| = |f(x)| + |f(\frac{1}{x})| \geqslant 2\sqrt{|f(x)| * |f(\frac{1}{x})|} = 2.$$

Reiškinys $x + \frac{1}{x}$, keičiant x, įgauna bet kokią reikšmę iš intervalo $[2, +\infty)$, vadinasi intervale $[2, +\infty)$ $f(x) \geqslant 2$, arba $f(x) \leqslant -2$. Gavome, kad funkcija šiame intervale yra savotiškai aprėžta (neįgauna reikšmių iš intervalo $(-2, 2)$), tad galime atmesti netiesinius Cauchy lygties sprendinius. Belieka į antrą sąlygą įstatyti $f(x) = kx$. Gausime $k = 1$ arba $k = -1$, ir, nesunku patikrinti, kad sprendiniai $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$ tiks. △

Pavyzdys 10. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(xy) = f(x)f(y)$ ir $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*

Sprendimas. Pirmoje lygtyje pakeitę $y = x$ gausime, kad $f(x^2) = f(x)^2$, vadinasi, visiems neneigiamiems x, $f(x) \geqslant 0$ ir intervale $[0, +\infty)$ funkcija yra aprėžta. Tada $f(x) = kx$. Patikrinę randame, kad tiks tik $k = 1$. △

Pavyzdys 11. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(xy) = f(x)f(y)$ ir intervale $(0, +\infty)$ yra monotoniškos.*

Sprendimas. Statykime $x = y = 0$, gausime $f(0) = 0$, arba $f(0) = 1$. Jei $f(0) = 1$, tai įsistatę $x = 0$ gausime $f(x) = 1$ visiems x, tad nagrinėkime atvejį, kai $f(0) = 0$.

Tarkime, kad egzistuoja $z \neq 0$, toks, kad $f(z) = 0$. Tada pradinėje lygtyje paėmę $x = \frac{x}{z}$ ir $y = z$ gausime $f(y) = 0$ visiems y.

Belieka išnagrinėti atvejį, kai $f(0) = 0$ ir su jokia kita reikšme funkcija nelygi nuliui. Pradinėje lygtyje įstatę $y = x$ gausime, kad $f(x^2) = f(x)^2$, arba $f(x) > 0$, kai $x > 0$. Vadinasi teigiamiems x, y galios:

$$\ln f(xy) = \ln f(x)f(y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Pažymėję $\ln f(x) = g(x)$, gausime $g(xy) = g(x) + g(y)$. Aišku, kad ir funkcija g yra monotoniška. Kintamieji x ir y teigiami, taigi galime pakeisti $x = e^x$, $y = e^y$. Gausime

$$g(e^{x+y}) = g(e^x) + g(e^y).$$

Pažymėję dar kartą $h(x) = g(e^x)$, gausime, kad h - monotoninė ir jai galioja

$$h(x+y) = h(x) + h(y),$$

taigi $h(x) = kx$. Lieka grįžti atgal - $g(e^x) = kx$, kur pakeitę $x = \ln x$, gausime $g(x) = k \ln x = \ln x^k$. Vadinasi, $\ln f(x) = \ln x^k$, arba $f(x) = x^k$, kur k - kažkoks realusis, o x - teigiamas.

Lieka rasti tik reikšmes neigiamiems skaičiams. Statykime į pagrindinę lygtį $x = y = -1$, gausime $f(-1) = -1$, arba $f(-1) = 1$. Tuomet įsistatę į lygtį $y = -1$

gausime $f(x) = -f(-x)$, arba $f(x) = -f(x)$. Pirmu atveju neigiamiems x gausime $f(x) = x|x|^{k-1}$, antruoju: $f(x) = |x|^k$. Taigi, visus sprendinius galime užrašyti taip:

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = \begin{cases} x^k, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ |x|^k, & x < 0; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^k, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x|x|^{k-1}, & x < 0. \end{cases}$$

△

Prie šio pavyzdžio galėtume paminėti dar dvi dažnai pasitaikančias paprastesnes, vadinamąsias "Cauchy tipo" lygtis - $t(x+y) = t(x)t(y)$ ir $z(xy) = z(x) + z(y)$. Turint atitinkamus apribojimus (tolydumas, monotoniškumas (aprėžtumas netiks, nes darant ketinius jis dingsta)) jų sprendiniai yra atitinkamai $t(x) = a^x$ ir $z(x) = log_a x$, ir sprendžiamos jos analogiškais keitiniais.

Uždaviniai

1. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis racionaliųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$. *S*

2. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis racionaliųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(x + f(y)) = f(x+1) + y$. *S*

3. Raskite visus tolydžių funkcijų $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trejetus, kurie su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(x+y) = g(x) + h(y)$. *S*

4. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$. *S*

5. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, kurios su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2yx)$. *S*

6. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurios su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y ir $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ tenkina $f(x^n + f(y)) = f^n(x) + y$. *S*

7. Raskite visus funkcijų $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvejetus tokius, kad: *S*
   a) Jei $x < y$, $f(x) < f(y)$.
   b) Visoms realiųjų poroms x ir y galioja $f(xy) = g(y)f(x) + f(y)$.

8. Raskite visas funkcijas $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms egzistuoja tokia griežtai monotoninė funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad visoms realiųjų poroms x ir y yra teisinga lygybė $f(x+y) = u(y)f(x) + f(y)$. *S*

9. Raskite visas funkcijas $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, kurios su visomis realiųjų skaičių poromis x ir y tenkina $f(\frac{x+y}{1+xy}) = \frac{f(x)f(y)}{|1+xy|}$ ir yra tolydžios. *S*

3 **SKYRIUS**

KOMBINATORIKA

3.1 Matematiniai žaidimai

Šiame skyriuje nagrinėsime dviejų žaidėjų matematinius žaidimus. Dažniausiai pasitaikanti tokių uždavinių sprendimo strategija yra visų galimų žaidimo pozicijų padalinimas į dvi dalis, vadinamas laiminčiosiomis pozicijomis ir pralaiminčiosiomis pozicijomis. Žaidėjas, būdamas laiminčiojoje pozicijoje visuomet gali paeiti taip, kad varžovas atsidurtų pralaiminčioje pozicijoje. Šis, savo ruožtu, yra pasmerktas po bet kurio ėjimo pastatyti varžovą į laiminčiąją. Laiminčiosioms pozijoms, žinoma, turi priklausyti ir žaidimą pergale užbaigiančios pozicijos, ar bent jau (jei žaidžiama iki kol kuris nors žaidėjas nebegalės padaryti ėjimo) jos turi garantuoti, kad žaidėjas ėjimą padaryti visuomet galės.

Pavyzdžiai apšilimui

Pavyzdys 1. *Ant stalo yra n akmenukų. Žaidėjas gali nuimti bet kokį akmenukų skaičių ne didesnį už k. Žaidėjai A ir B ėjimus atlieka pakaitomis, pradeda A. Laimi tas žaidėjas, kuris nuimą paskutinį akmenuką. Kuris žaidėjas laimėsi su atitinkamais n?*

Nagrinėkime žaidimus su nedideliais n. Jei $n < k+1$, tada laimės A. Jei $n = k+1$, tada laimi B. Dabar jau nesunku pastebėti, kad jeigu akmenukų skaičius nėra $k+1$ kartotinis, tada žaidėjas gali jį tokiu padaryti nuimdamas reikiamą kiekį akmenukų, o žaidėjas gavęs $k+1$ kartotinį, negali nuimti tiek akmenukų, kad gautų kitą $k+1$ kartotinį. Jei n nėra $k+1$ kartotinis, tada A visada galės po savo ėjimo palikti $k+1$ kartotinį skaičių akmenukų, o kadangi 0 yra būtent toks, tai jis ir laimės žaidimą. Jei n yra $k+1$ kartotinis, panašiai žaisdamas laimi B.

Pastaba. Šiame pavyzdyje visi galimi akmenukų kiekiai padalinami į dvi grupes. Pirmojoje grupėje yra $k+1$ kartotiniai (1), antrojoje - likę skaičiai (2). Iš (2) visada galima patekti į (1), o bet koks ėjimas iš (1) veda į (2).

Pavyzdys 2. *Ant stalo yra n akmenukų. Žaidėjas gali pašalinti 2^m akmenukų, kur m yra sveikasis neneigiamas skaičius. Kuris žaidėjas laimės dabar?*

Jei $n \equiv 1 \pmod 3$ arba $n \equiv 2 \pmod 3$ tada A pašalindamas atitinkamai 1 arba 2 akmenukus gaus skaičių dalų iš trijų, o antrasis žaidėjas, negalėdamas atimti trejeto kartotinio, gaus nedalų iš trijų. Kadangi 0 yra dalus iš trijų, tai žaidimą laimės A. Jei $n \equiv 0 \pmod 3$ žaidimą laimi B.

Pastaba. Šiame pavyzdyje visi galimi akmenukų kiekiai padalinami į dvi grupes. Pirmojoje grupėje yra 3 kartotiniai (1), antrojoje - likę skaičiai (2). Iš (2) visada galima patekti į (1), o bet koks ėjimas iš (1) veda į (2).

Pavyzdys 3. *Ant stalo yra n akmenukų. Žaidėjas gali pašalinti bet kokį pirminį skaičių arba vieną akmenuką. Kaip žaidimas vyks dabar?*

Jei n nėra keturių kartotinis, tai laimi pirmasis žaidėjas nuimdamas tiek akmenukų, kad gautų keturių kartotinį. Jei n yra keturių kartotinis, laimi antrasis žaidėjas.

Pavyzdys 4. *Ant stalo yra n akmenukų. Žaidėjas gali pašalinti p^n akmenukų, kur p bet koks pirminis, o n neneigiamas sveikasis skaičius. Kaip žaidimas vyks dabar?*

6 yra mažiausias skaičius, kuris nėra pirminio skaičiaus laipsnis. Jei n yra nedalus iš šešių, tada A gali jį padaryti tokį ir taip užsitikrinti, kad pats negaus šešių kartotinio. A laimės žaidimą. Jei n yra šešių kartotinis panašiai žaisdamas laimi B

Jei žaidėjas A VISADA gali atlikti tokį ėjimą, po kurio B negali vienu ėjimu laimėti žaidimo, tai B NIEKADA ir nelaimės. Jei žaidimas kada nors baigsis, tai pergalę švęs A.

Simetrija

Dažnai pasitaikanti strategija olimpiadiniuose uždaviniuose yra simetrija. Jei žaidimo laukas turi simetrijos ašį ar centrą, žaidėjas gali suskirstyti visą lauką į simetriškų ėjimų poras. Žaidėjui A atlikus vieną ėjimą iš šios poros, žaidėjui B tereikia atlikti antrąjį. Taip jis užsitikrina, kad po kiekvieno priešininko ėjimo jis galės atlikti dar bent vieną ėjimą.

Pavyzdys 5. *Žaidėjai A ir B stačiakampėje lentelėje $2 \times n$ paeiliui spalvina po vieną langelį arba du bendrą sieną turinčius langelius. Nuspalvinto langelio spalvinti nebegalima. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Nurodykite, kuris žaidėjas turės laiminčią strategiją su atitinkamais n.*

Kai n yra nelyginis, tai A pirmu ėjimu spalvina du centrinius langelius. Šie langeliai lentos tampa simetrijos ašimi. Kiekvienas lentelės langelis turi sau simetrišką, jie yra suskirstyti į poras. Dabar po bet kurio B ėjimo A galės atlikti simetrišką ėjimą centrinių langelių atžvilgiu. A žaidėjas niekada nepralaimės. Kadangi langelių skaičius baigtinis ir kiekvienu ėjimu sumažėja, tad žaidimas yra baigtinis. Iš šių dviejų teiginių seka, kad pirmasis žaidėjas turi laiminčiąją strategiją.

Kai n yra lyginis, tada, kad ir kokį ėjimą atliktų A, B galės atlikti simetrišką ėjimą lentelės centro, atžvilgiu. Kadangi žaidimas baigtinis, B turės laiminčiąją strategiją.

Pavyzdys 6. *Žaidimo erdvė yra apvalus stalas. Žaidėjai A ir B pakaitomis deda identiškas monetas ant stalo. Monetos negali persidengti. Pralaimi žaidėjas,kuris nebegali atlikti ėjimo. Įrodykite, kad žaidimą laimės A.*

Pirmu ėjimu A deda monetą taip, kad jos centras sutaptų su stalo centru, o vėliau deda monetas simetriškai B padėtoms centrinės monetos atžvilgiu.

Pavyzdys 7. *Apskritime pažymėta n taškų iš eilės sunumeruotų skaičiais $1, 2..., n$. Šis apskritimas yra žaidimo $A(n)$ erdvė. Du žaidėjai P ir L paeiliui brėžia po stygą, jungiančią du taškus, kurių numeriai yra vienodo lyginumo. Pradeda P. Leidžiama jungti tik taškus, kurie nėra sujungti su nė vienu kitu. Nubrėžtos stygos negali kirstis. Pralaimi tas žaidėjas, kuris negali atlikti ėjimo. Kuris žaidėjas laimi su atitinkamais n?*

Jeigu iškart nesimato, kaip spręsti uždavinį, pravartu pabandyti paprastesnius atvejus. Lengva suprasti, kad žaidimus $A(1)$ ir $A(2)$ žaidėjas P pralaimi, žaidimus $A(3)$ ir $A(4)$ – laimi. Žaidimą $A(5)$ laimi P sujungdamas 1 ir 3 taškus.

Galime įsivaizduoti, kad taškai (nekeičiant jų tarpusavio padėties) yra išdėlioti taisyklingojo n-kampio viršūnėse; tai žaidimo eigai ir baigčiai įtakos neturi.

Nagrinėsime žaidimus $A(n)$, kai $n = 4k$. Parodysime, kad juos laimi P. Apskritimo taškai priklausantys vienam skersmesniui yra vadinami diametraliai priešingais. Šiuo atveju visų diametraliai priešingų taškų lyginumas yra vienodas. Pirmo ėjimo metu P tereikia sujungti bet kuriuos diametraliai priešingus taškus. Nubrėžtas skersmuo tampa apskritimo simetrijos ašimi. Kiekvienas taškas turi sau simetrišką šio skersmens atžvilgiu, suskirstome simetriškus taškus į poras. Pastebime, kad L negali brėžti stygos iš karto per du vienos poros taškus, kitaip ši kirstų simetrijos ašį. Į kiekvieną L nubrėžtą stygą P atsako simetriška šiai skersmens atžvilgiu, parodysim, kad jis visada galės tai padaryti. P taktika garantuoja, kad po kiekvieno jo ėjimo arba abu poros taškai yra laisvi arba per abu eina po stygą (1). Tarkime, kad L sujungia taškus A ir B, jiems simetriški atitnkamai yra C ir D (jie yra tikrai laisvi pagal (1)). Tarkime, kad P negali sujungti taškų C ir D, tada tarp jų yra taškas E ir styga CD kerta stygą EF. Bet jau yra nubrėžta styga simetriška CF (1), o ši kerta AB. Gavome prieštarą. Žaidimą laimi P.

Kada $n = 4k + 2$, laimi L. Dabar diametraliai priešingų taškų lyginumas yra skirtingas. L suskirsto diametraliai priešingus taškus į poras. Jei P brėžia stygą per A ir B, tai L atsako styga einančia per diametraliai šiems priešingus taškus C ir D. P negali brėžti stygos per abu poros taškus, nes šių lyginumas skiriasi. L strategija garantuoja, kad po kiekvieno jo ėjimo arba abu poros taškai yra panaudoti arba abu yra laisvi (1). Tarkime, kad ši strategija negarantuoja L pergalės. P paskutiniu ėjimu brėžia stygą per A ir B, C ir D yra šiems diametraliai priešingi ir jie abu yra laisvi pagal (1). Vadinasi tarp jų yra taškas E, o styga EF kerta CD. Bet jau yra nubrėžta styga per tašką diametraliai priešingą E (1) ir ji kerta tiesę AB. Prieštara. P bus žaidėjas, kuriam pirmajam pritrūks ėjimų. Laimės L.

Kada $n = 4k + 1$, laimi P. Savo pirmu ėjimu jis sujungia n ir $n - 2$. Kartu iš tolimesnio žaidimo iškrinta taškas $n - 1$. Viso lieka $4k + 1 - 3 = 4(k - 1) + 2$ taškų, o šį atvejį jau išnagrinėjome aukščiau.

Kada $n = 4k + 3$, laimi P. Savo pirmuoju ėjimu jis sujungia $2k + 1$ ir $2k + 3$, kartu iš žaidimo iškrinta $2k + 2$. Lieka 4k taškų, tarp kurių negalima nubrėžti nė vieno skersmens, tad žaidžiama kaip atveju su $4k+2$ taškų.

Pavyzdys 8. *(Leningradas 1989) Du žaidėjai A ir B žaidžia žaidimą ant* 10×10 *lentos. Žaidėjas gali įrašyti pliusą arba minusą į tuščią lentelės langelį. Pradeda A. Jeigu po žaidėjo ėjimo atsiranda trys iš eilės einantys langeliai (horizontaliai, vertikaliai arba įstrižai) su vienodais ženklais, žaidėjas laimi. Ar kuris nors žaidėjas turi laiminčiąją strategiją? Jei taip, tai kuris?*

B turi laiminčiąją strategiją. Jeigu jis gali vienu ėjimu laimėti, tai jis nesivaržydamas tai padarys. Kitu atveju jis įrašo priešingą ženklą padėtam A į simetrišką langelį centro atžvilgiu. Nesunku įsitikinti, kad taip žaidžiant A žaidėjas niekada negalės laimėti. Belieka įrodyti, kad B tai galės padaryti visada. Nagrinėkime centrinį kvadratą 4×4 po to, kai A į centrinį 2×2 įrašė antrąjį savo ženklą. Dabar jame greta yra įrašyti du vienodi ženklai. Turėdami omenyje, kad A negali laimėti šio žaidimo, nesunkiai galime parodyti, kad B visada laimės. Pabandykite tai padaryti patys.

Netiesioginiai sprendimai (*non-constructive*)

Nagrinėtuose uždaviniuose mes pateikėme strategijas, kuriomis vadovaudamasis A arba B visada galės laimėti žaidimą. Tačiau kartais tai daryti yra visai nebūtina. Jei klausiama, ar žaidėjas A visada gali laimėti, mums nereikia nurodyti būdo, kaip A tai gali padaryti. Užtenka parodyti, kad A galiausiai pasieks pergalę. Tokie sprendimai, nesiūlantys algoritmo pergalei pasiekti, vadinami netiesioginiais sprendimais.

Pavyzdys 9. *Žaidėjai A ir B pakaitomis lentoje rašo sveikuosius teigiamus skaičius ne didesnius už p. Draudžiama rašyti skaičius, kurie dalija nors vieną iš jau užrašytų. Pralaimi tas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Kas laimi atveju* $p=10$*?* $p=1000$*?*

Abiem atvejais laimi A. Pirmuoju atveju A užrašo 6. Tada B gali rašyti tik skaičius iš porų $(4,5)$, $(10,8)$, $(9,7)$ ir A visada gali užrašyti antrąjį skaičių iš tos poros.

Nagrinėdami šį žadimą pastebime, kad vienas skaičius čia ypatingas. Tai yra 1. B niekada negali jo parašyti, tai gali atlikti tik A ir tik pirmuoju ėjimu. Nagrinėkime tokį žaidimą (1), kuriame A pirmo ėjimo metu neparašo vieneto. Jei šiame žaidime jis turi laiminčiąją strategiją, tai mūsų darbas jau baigtas, tad tarkime, kad A tokį žaidimą visada pralaimi. Kas vyksta jei A pirmo ėjimo metu parašo vienetą (2)? Tada žaidimas virsta (1), tik čia jau B yra pirmasis žaidėjas ir jis visada šį žaidimą pralaimi, kitaip A jau būtų laimėjęs. Taigi A tikrai gali laimėti (1) arba (2), kadangi jis pats pasirenka, kurį žaidimą žais, tai jis laimės ir visą žaidimą.

Pavyzdys 10. *Žaidžiamas šachamatų žaidimas, bet žaidėjai pakaitomis atlieka po du ėjimus. Pradeda A. Ar kuris nors žaidėjas šiuose šachmatuose gali garantuoti, kad niekada nepralaimės?*

Taip, tai gali padaryti A. Tarkime, kad B turi laiminčiąją strategiją. A pajuda pirmyn ir atgal su žirgu ir taip jis apsikeičia pozicijomis su B, dabar jau jis turi laiminčiąją strategiją. Gavome prieštarą. Vadinasi A turi nepralaiminčiąją strategiją.

Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad šis žaidimas gali tęsti be galo ilgai.

Pavyzdys 11. *(Žaidimas CHOMP) Žaidėjai A ir B laužo $m \times n$ dydžio šokolado plytelę pakaitomis. Žaidėjas pasirenka kurį nors langelį ir išlaužia iš plytelės stačiakampį, kurio priešingos viršūnės yra šis langelis ir pradinės plytelės viršutinis dešinysis kampas (stačiakampio kraštinės lygiagrečios plytelės kraštinėms). Pralaimi tas žaidėjas, kuris atsilaužia apatinį kairįjį kampą. Su kokiomis šokolado plytelėmis gali laimėti B?*

B galės laimėti tik atveju $m = n = 1$. Nagrinėkime likusius atvejus. Čia ypatingas yra viršutinis dešinysis langelis. B niekada jo negaus, jį A atlauš pirmuoju ėjimu. Tarkime, kad pirmasis žaidėjas, kad ir kaip žaistų, negali laimėti. Jis pirmuoju ėjimu atlaužia viršutinį dešinį langelį, B tada atlieka ėjimą $(*)$, kuris, kaip tarėme, atves jį į pergalę. Tačiau akivaizdu, kad A savo pirmo ėjimo metu gali atlikti ėjimą $(*)$ ir atsidurti laiminčioje pozicijoje. Prieštara. Vadinasi žaidimą visada laimės A.

Pavyzdys 12. *(Tournament of Towns 2005) Matelotas ir Kauntelotas nori išsidalinti 25 monetas, kurių vertės yra $1, 2, 3 \ldots, 25$ kapeikos. Kiekvienu ėjimu vienas žaidėjas pasirenka monetą, o kitas nusprendžia, kuriam iš jų jinai atiteks. Pirmasis monetą renkasi, žinoma, Matelotas, o kitus monetų pasirinkimus atlieka tas, kuris tuo momentu turi daugiau kapeikų. Jei abu žaidėjai turi lygiai kapeikų, sprendimą atlieka tas, kuris tai darė prieš tai. Laimi tas, kuris galų gale turi daugiausiai kapeikų. Kuris žaidėjas turi laiminčiąją strategiją?*

Tokią strategiją turi Kauntelotas. Po pirmojo Mateloto pasiūlymo jis gali atsisakyti monetos arba ją paimti. Jei jis gali laimėti paėmęs monetą, tai taip ir padaro. O jeigu paėmęs monetą laimėti negali, tai duoda ją Matelotui ir po tokio ėjimo Matelotas niekaip negali surinkti daugiau kapeikų. Kauntelotas laimi.

Žaidimas NIM

Apibrėžimas. Bešaliu (angl. impartial) žaidimu vadinsime tokį, kuriame aibės ėjimų, kuriuos gali atlikti abu žaidėjai, yra identiškos.

Apibrėžimas. Dviejų žaidėjų žaidimas yra Normalus (angl. normal), jei jis yra bešalis ir laimi tas, kuris atliko paskutinį ėjimą.

Klasikinis tokio žaidimo pavyzdys yra NIM:

Apibrėžimas. Žaidimo erdvė yra n krūvelių su įvairiais akmenukų kiekiais jose. Du žaidėjai paeiliui atlieka ėjimus imdami akmenukus. Žaidėjas gali paimti kiek nori akmenukų iš pasirinktosi krūvelės (turi paimti bent vieną akmenuką). Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo.

Žaidimas ganėtinai sudėtingas. Pradžiai patartina pabandyti išnagrinėti paprastesnius žaidimo atvejus:

1. Žaidimo erdvė yra dvi krūvelės, kuriose atitinkamai yra po 21 ir 20 akmenukų. Žaidėjas pasirenka krūvelę ir suvalgo visus akmenukus esančius joje. Likusią krūvelę padalina į dvi (nebūtinai netuščias) krūveles. Laimi tas žaidėjas, kuris suvalgo paskutinį akmenuką. Kuris žaidėjas turi laiminčiąją strategiją? Su kokiais krūvelių dydžiais antrasis žaidėjas turi laiminčiąją strategiją?

2. NIM žaidimas su dviem lygiomis krūvelėmis. Kuris žaidėjas turi laiminčiąją strategiją?

3. Kaip baigsis NIM žaidimas su lyginiu lygių krūvelių skaičiumi? Nelyginiu?

4. NIM žaidimas su trimis krūvelėmis, kuriose yra 3, 5 ir 7 akmenukai.

NIM sprendimo pagrindas yra vadinamasis NIM sumavimas. Užsirašykime kiekvienos krūvelės akmenukų skaičių dvejetaine sistema. Atlikdami paprastą sumavimą stulpeliu mes įsimename, kiek dešimčių turime pernešti į kitą eilę, o NIM sumavimas yra sumavimas be pernešimų, sudedame atskirai kiekvieną stulpelį. NIM sumavimas aprašomas naudojant simbolį $\otimes$. Panagrinėkime pavyzdį su 21, 17, 15 akmenukų.

$$\begin{gathered}10101\\10001\\01111\\---\\01011\end{gathered}$$

$21 \otimes 17 \otimes 15 = 11$. Matome, kad stulpelio vertė lygi nuliui, jei tame stulpelyje yra lyginis skaičius vienetų, ir lygi vienetui, jei vienetų skaičius yra nelyginis. NIM sumą sudarytą vien iš nulių vadinsime pozicija $(*)$.

Teiginys. *Iš bet kokios pozicijos, kuri nėra* $(*)$*, galime pereiti į* $(*)$

Randame kairiausią stulpelį, kurio NIM sumos vertė yra lygi vienetui (toks stulpelis atsiras, nes nagrinėjama situacija nėra $(*)$). Imame didžiausią akmenukų kiekį A, kurio dvejetainėje išraiškoje šioje pozicijoje yra vienetas ir atliekame NIM sumavimą visiems akmenukų kiekiams išskyrus A. Gauname sumą B. Nesunku suprasti, kad $A \geqslant B$, įsitikinkite tuo. Kadangi $A \geqslant B$, tai galime iš A paimti tiek akmenukų, kad gautume B, o tada visų krūvelių NIM suma bus sudaryta vien iš nulių. Atsidursime pozicijoje $(*)$.

Pavyzdiniu atveju $A = 01111$, $B = 00100$. Dešimtainėje išraiškoje $A = 15$, $B = 4$. $A - B = 11$. Iš nagrinėjamos krūvelės atimame 11 akmenukų ir atliekame NIM sumavimą:

$$\begin{gathered}10101\\10001\\00100\\---\\00000\end{gathered}$$

Teiginys. *Iš pozicijos* $(*)$ *negalime pereiti į kitą poziciją* $(*)$

Norint tai atlikti reiktų kiekvieno stulpelio vienetų skaičių pakeisti lyginiu skaičiumi, o kadangi turime keisti tik vienos krūvelės akmenukų skaičių, tai to tikrai negalėsim padaryti.

1. Jei pirmasis žaidėjas pradeda žaidimą pozicijoje, kuri nėra $(*)$, jis gali garantuoti, kad po priešininko ėjimo pozicija nebus $(*)$, kad priešininkas nepaims paskutinio akmenuko. Pirmasis žaidėjas turi laiminčiąją strategiją.

2. Jei pirmasis žaidėjas pradeda žaidimą pozicijoje $(*)$, antrasis žadėjas analogiškai turi laiminčiąją strategiją.

Apibrėžimas. Struktūriškai identiški žaidimai vadinami izomorfiškais.

Teorema (Sprague-Grundy)**.** *Visi bešaliai žaidimai G yra izomorfiški žaidimui NIM. (Teoremos įrodymą galite rasti John Conway knygoje „On Numbers And Games")*

Taigi, visi bešaliai dviejų žaidėjų žaidimai veikia lygiai taip pat! Šachmatus, ir tuos, galima analizuoti kaip akmenukų krūveles. Kiekvienai žaidimo pozicijai Q priskiriame NIM reikšmę (angl. NIM value), kuri yra lygi mažiausiam neneigiamam sveikajam skaičiui, nepriskirtam jokiai pozicijai, kuri yra pasiekiama iš Q vieno ėjimo metu. Žaidimo pabaigos pozicijos reikšmė lygi 0, nes iš jos negalime pasiekti jokios kitos pozicijos.

Pavyzdys 13. *Ant stalo yra n akmenukų. Žaidėjas gali nuimti bet kokį akmenukų skaičių ne didesnį už k. Žaidėjai A ir B ėjimus atlieka pakaitomis, pradeda A. Laimi tas žaidėjas, kuris nuimą paskutinį akmenuką. Kuris žaidėjas laimėsi su atitinkamais n?*

Jei akmenukų yra n, kur $k \geqslant n$, tai n priskiriame (n), nes iš šios pozicijos galime patekti į bet kurią kitą. Iš $n = k + 1$ negalime patekti į 0, tai priskiriame jai (0) ir t.t. Jei pradinė situacija yra (z), tai iš jos vienu ėjimu neįmanoma patekti į (z), pagal apibrėžimą. Jei A pradeda (0), tai jis pralaimės. Kitu atveju A laimi.

Pavyzdys 14. *(Putnam 1995) Žaidimas pradedamas su keturiomis akmenukų krūvelėmis, kurių dydžiai* 3,4,5 *ir* 6*. A ir B atlieka ėjimus pakaitomis. Galima atlikti du ėjimus:*

1. *Paimti vieną akmenuką iš krūvelės, jei joje lieka nemažiau negu* 2*.*

2. *Paimti visą krūvelę iš trijų arba dviejų akmenukų.*

Laimi tas, kuris atlieka paskutinį ėjimą. Kuris žaidėjas gali visada laimėti?

Krūvelių dydžiai 0,2,3,4,5 ir 6 turi NIM vertes atitinkamai lygias 0,1,2,0,1 ir 0. Pradinės situacijos NIM suma yra $2 \otimes 0 \otimes 1 \otimes 0 = 3$. Pirmojo ėjimo metu A paima vieną akmenuką iš mažiausios krūvelės. Dabar NIM suma yra $1 \otimes 0 \otimes 1 \otimes 0 = 0$; tokia yra ir žaidimo pabaigos NIM suma $0 \otimes 0 \otimes 0 \otimes 0 = 0$ (*). Šioje situacijoje B negauna nė vienos krūvelės iš 3 akmenukų. Jei jis pereis iš vertės (0) į (2), tai A pereis iš (2) į (0) ir B vėl gaus (*). Jei B pereis iš (0) į (1), tai A pereis iš (1) į (0). Jei B pereis iš (1) į (0), tai A galės pereiti iš (1) į (0), nes jo gautos situacijos NIM suma bus nelyginė. Po abiejų šių ėjimų NIM suma lieka (*). Išnagrinėjom visus galimus B veiksmus, kadangi po nė vieno A ėjimo ant stalo neatsiranda vertės (2) krūvelės. Taigi į kiekvieną B ėjimą A gali atsakyti dar bent vienu, o žaidimas yra baigtinis. A laimės šį žaidimą.

Pastaba. Daugiau apie uždavinį ir NIM vertes galite rasti knygoje „The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000 Problems, Solutions, and Commentary".

Zermelo teorema

Teorema (Zermelo)**.** *Baigtiniame pilnos informacijos dviejų žaidėjų žaidime, kuriame žaidėjai atlieka ėjimus pakaitomis ir nėra sėkmės faktoriaus, kuris nors žaidėjas privalo turėti laiminčiąją strategiją, jei negalimos lygiosios arba nepralaiminčią, jei jos galimos.*

Kiekvieną baigtinio žaidimo partiją galime užrašyti kaip seriją ėjimų atliekamų pakaitomis. Kiekvieną partiją laimi vienas arba kitas žaidėjas. Baigtinį žaidimą galime užrašyti kaip baigtinį skaičių galimų partijų (tai nebūtinai pavyks, jei kuris nors žaidėjas kokioje nors situcajoje galės rinktis iš begalybės variantų, bet kiek jūs matėte tokių žaidimų?). Kadangi nė vienas žaidėjas negali sukčiauti arba iškviesti baltojo drakono kortos, tai žaidėjai visada žino, kokiais ėjimais priešininkas galės atsakyti į vieną ar kitą veiksmą. Jei žaidėjui A egzistuoja ėjimų seka su kuria, kad ir kaip žaistų B, A visada laimi, tai jis turi laiminčiąją strategiją. Jei tokia seka neegzistuoja, visada laimi B.

Pastaba. Spręsdami uždavinius olimpiadose neužmirškite įrodyti, kad žaidimas tikrai baigtinis (baigsis, kad ir kaip žaistų priešininkas). Kaip žaidėjui laimėti žaidimą, jei jis niekada nesibaigia?

Uždaviniai

1. Žaidėjai A ir B paeiliui laužia šokolado plytelę $m \times n$ išilgai linijų ir atsilaužtą dalį suvalgo. Apatinis kairys langelis yra užnuodytas, jį suvalgęs žaidėjas pralaimi. Su kokiomis m ir n reikšmėmis žaidėjas B turi laiminčiąją strategiją? *S*

2. Žaliaūsis ir Purpurinūsis pakaitomis deda žalius ir purpurinius žirgus ant laisvų šachmatų lentos langelių, pradeda Žaliaūsis. Negalima žirgo padėti taip, kad jį kirstų priešininko figūra. Laimi tas, kuris atlieka paskutinį ėjimą. Kas laimės? *S*

3. Pradžioje $n = 2$. A ir B pakaitomis prideda prie turimo skaičiaus n bet kokį jo daliklį, kuris nėra lygus n, ir priešininkui pateikia naująjį n. Laimi tas, kuris parašo skaičių nemažesnį už 1990. Kas laimės? *S*

4. $n \times n$ šachmatų lentos kairiajame apatiniame kampe guli akmenukas. A ir B ėjimus atlieka pakaitomis, pradeda A. Žaidėjai gali pastumti akmenuką į gretimą langelį, kuris dar niekada nebuvo aplankytas. Laimi tas, kuris atlieka paskutinį ėjimą. *S*
   1) Kas laimi su lyginiais n?
   2) Kas laimi su nelyginiais n?
   3) Kas laimi, jei žaidimo pradžioje akmenukas yra gretimame kampiniui langelyje?

5. A padeda žirgą į pasirinktą 8×8 lentos langelį. Tada B atlieką ėjimą ir toliau ėjimai atliekami pakaitomis. Kiekviename langelyje žirgas gali pabūti tik vieną kartą. Pralaimi tas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Kas laimi? *S*

6. Netikėtai žaidimą vėl žaidžia A ir B, A pradeda, ėjimai atliekami pakaitomis. Yra dvi krūvelės atitnkamai po p ir q akmenukų. Ėjimo metu žaidėjas gali paimti pasirinktą akmenuką iš pasirinktos krūvelės, paimti po akmenuką iš kiekvienos krūvelės arba perkelti akmenuką iš vienos krūvelės į kitą. Kas laimi su atitnkamais p ir q? *S*

7. (Žaidimas CHOMP) Taisyklės nurodytos netiesioginių sprendimų skyrelyje. Sugalvokite strategiją, kuri pelnytų pirmajam žaidėjui pergalę atvejais: *S*
1) $m = n$.
2) $m = 2$, n
3) m ir n bet kokie natūralieji.

8. Duotas trikampis pyragas, kurio plotas yra vienetas. A renkasi tašką X trikampio plokštumoje. B pjauna tiese einančia per X. Kokį didžiausią plotą B gali atsipjauti? *S*

9. Duotas daugianaris $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \cdots = 0$. A parašo sveikąjį skaičių, nelygų 0, vietoj kurio nors tritaškio. Tada B rašo sveikąjį skaičių ir daugianarį sveikuoju skaičiumi užbaigia A. Įrodykite, kad A gali žaisti taip, kad visos trys daugianario šaknys būtų sveikieji skaičiai. *S*

10. [All Russian Olympiad 1992] Krūvelėje yra N akmenukų. Žaidėjas gali paimti k akmenukų, kur k dalina akmenukų skaičių paimtą priešininko jo paskutinio ėjimo metu. Pirmu ėjimu pirmasis žaidėjas gali paimti kiek nori akmenukų išskyrus 1 ir N. Laimi tas, kuris paima paskutinį akmenuką. Su kokiu mažiausiu $N \geqslant 1992$ antrasis žaidėjas turi laiminčiąją strategiją? *S*

11. Žaidėjai pakaitomis renkasi skaičius iš aibės $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Jei žaidėjas surenka tris skaičius, kurių suma lygi 15, jis laimi. Kaip baigiasi žaidimas, jei žaidžiama optimaliai? Kokiam gerai žinomam žaidimui ši užduotis yra izomorfiška? *S*

12. Merlinkas sugalvoja skaičių N. Matekaralius nupiešia N stačiakampių, sudarytų iš vienetinių langelių (nebūtinai lygių ir būtinai netuščių). Merlinkas iš piešinėlių išburia analogiškas šokolado plyteles. Jis pirmasis atsilaužia nuo pasirinktos plytelės šokolado (laužia išilgai linijų) ir jį suvalgo arba suvalgo visą plytelę. Ėjimai vyksta pakaitomis. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Ar Merlinkas turi laiminčiąją strategiją? *S*

13. Ant stalo yra n akmenukų. Žaidėjas gali nuimti 1, 3 arba 8 akmenukus. Matemagikas ir B ėjimus atlieka pakaitomis, pradeda Matemagikas. Laimi tas žaidėjas, kuris nuima paskutinį akmenuką. Kuris žaidėjas laimės su atitinkamais n? *S*

14. Ant stalo yra n akmenukų. Žaidėjas gali paimti nedaugiau negu pusę jų. Žaidėjai A ir B ėjimus atlieka pakaitomis, pradeda A. Laimi tas žaidėjas, kuris atlieka paskutinį ėjimą. Kuris žaidėjas laimės su atitinkamais n? *S*

15. Plokštumoje nubrėžiami 1994 vektoriai. Du žaidėjai paeiliui renkasi vektorius ir juos sumuoja su jau turimais. Pralaimi tas, kuris galų lage turi trumpesnį vektorių. Ar pirmasis žaidėjas turi nepralaiminčią strategiją? *S*

16. [All Russian Olymnpiad 1994] Žaidėjai A, B paeiliui atlieka ėjimus su žirgu 1994×1994 šachmatų lentoje. A atlieka horizontalius (pereina į gretimą eilutę) ėjimus, o B - vertikalius. A pasirenka žirgo poziciją ir atlieką pirmą ėjimą. Žirgas negali atsidurti langelyje, kuriame jau yra buvęs. Pralaimi tas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Įrodykite, kad A turi laiminčiąją strategiją. *S*

17. [Tournament of Towns 2009] Du žaidėjai paeiliui spalvina po N taškų ant apskritimo. Pirmojo spalva - raudona, antrojo - mėlyna. Spalvinti to paties taško negalima. Žaidimo pabaigoje gaunamas apskritimas padalintas į $2N$ lankų. Randamas ilgiausias lankas, kurio abu galai nuspalvinti ta pačia spalva. Žaidimą laimi šios spalvos savininkas. Ar kuris nors žaidėjas turi laiminčiąją strategiją su visais $N > 1$? *S*

18. [IMO shortlist 1991] A ir B žaidžia žaidimą. Kiekvienas užrašo po sveiką teigiamą skaičių ir duoda jį teisėjui. Teisėjas lentoje užrašo du skaičius, vienas jų yra žaidėjų skaičių suma. Tada teisėjas klausia A: „Ar žinai kokį skaičių užrašė B?", jei A atsako neigiamai, tada teisėjas to paties klausia B ir t.t. Tarkime, kad A ir B yra baisiai protingi ir niekada nemeluoja. Įrodykite, kad šis žaidimas yra baigtinis. *S*

19. A ir B pakaitomis keičia tritaškius $x^{10} + \ldots x^9 + \ldots x^8 + \ldots x^7 + \ldots x^6 + \ldots x^5 + \ldots x^4 + \ldots x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + 1 = 0$ į realiuosius skaičius. Jei žaidimo pabaigoje daugianaris turi nors vieną realiąją šaknį, laimi B. Ar gali B laimėti? *S*

20. [Kvant 1987] Žaidimo erdvė yra begalinė plokštuma. A savo ėjimu nuspalvina vieną tašką raudonai, o B k taškų mėlynai. A laimi, jei po jo ėjimo plokštumoje atsiranda kvadratas, kurio kraštinės lygiagrečios ašims ir visos jo viršūnės raudonos. Ėjimai atliekami pakaitomis. Ar A gali laimėti, kai $k = 1$? $k = 2$? k jūsų megstamiausias natūralusis skaičius? *S*

4 **SKYRIUS**

SPRENDIMAI

Skaičių teorija

Dalumas

1. Jei $n|3a$, tai $n|12a$ ir $n|12a + 5b - 12a = 5b$. Aišku, kad iš $n|5b$ seka ir $n|10b$. ∧

2. Pastebėkime, kad b galima išreikšti kaip $3(2a + 5b) - 2(3a + 7b)$, o a kaip $5(3a + 7b) - 7(2a + 5b)$, vadinasi, abu jie iš n dalinsis. ∧

3. Ne, jos visos trys neteisingos. ∧

   a) Jei $x|a + b$, tai nebūtinai $x|a$ ir $x|b$. Pavyzdžiui, $5|2 + 3$, bet $5 \nmid 2$ ir $5 \nmid 3$.

   b) Jei $x|a \cdot b$, tai nebūtinai $x|a$ arba $x|b$. Pavyzdžiui, $6|2 \cdot 3$, bet $6 \nmid 2$ ir $6 \nmid 3$. Kaip bebūtų, ši savybė teisinga, kai x pirminis (jei dviejų skaičių sandauga dalijasi iš pirminio skaičiaus, tai iš to pirminio dalijasi nors vienas iš skaičių).

   c) Jei $x|a$ ir $y|a$, tai nebūtinai $xy|a$. Pavyzdžiui, $4|12$ ir $6|12$, bet $24 \nmid 12$.

4. Taip gauto skaičiaus skaitmenų suma yra lygi 45, tad pagal dalumo požymį jis iš 9 dalinsis. ∧

5. Pritaikome dalybos iš 11 požymį: $a - b + b - a = 0$ dalijasi iš 11, vadinasi ir skaičius $\overline{abba}$ dalinsis iš 11. ∧

6. a) Jei vietoje žvaigždutės įrašysime x, tai gauto skaičiaus skaitmenų suma bus lygi $15 + x$. Ji dalinsis iš 9 kai $x = 3$ ∧

   b) Pagal dalumo požymį iš 8 turi dalintis $45*$. Kadangi 400 dalijasi iš 8 ir 56 dalijasi iš 8 tai vietoje žvaigždutės galime įrašyti 6.

   c) Alternuojanti suma vietoj žvaigždutės įrašius x yra lygi $3 - x$. Ji dalinsis iš 11, kai $x = 3$.

7. Pakanka pastebėti, kad $10a + b$ yra lygus $10(a + 4b) - 13 \cdot 3b$. $\wedge$

8. Atmetę lyginius ir dalius iš 5 skaičius gauname, kad lieka patikrinti 181, 183, 187, 189, 191, 193, 197 ir 199. Pagal dalumo požymius 183 ir 189 dalijasi iš 3, o 187 iš 11. Iš 7 šitame intervale dalijasi skaičiai $182, 189$ ir 196, o iš 13 tik 182. Vadinasi, skaičiai $181, 191, 193, 197$ ir 199 nesidalija iš pirminių, mažesnių už $\sqrt{199} \approx 14$, todėl yra pirminiai. $\wedge$

9. Išskaidykime: $n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$. Kadangi su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis abu dauginamieji yra didesni už 1, tai jų sandauga niekada nebus pirminis skaičius. $\wedge$

10. Išskaidykime dauginamaisiais: $\wedge$

$$a^3 + 2a + b^3 + 2b = 2(a + b) + (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2 + 2).$$

Kadangi $a + b$ dalijasi iš n, tai ir duotas reiškinys iš n dalinsis.

11. Pagal Euklido algoritmo išvadą tokiu būdu galima išreikšti $\text{dbd}(8, 5) = 1$. Bet tuomet galima išreikšti ir bet kurį skaičių a - pakanka vietoje x ir y, naudojamų vieneto išraiškoje, imti ax ir ay. $\wedge$

12. Negali. Jei jo lyginėse pozicijose esančių skaitmenų sumą pažymėsime x, o nelyginėse y, tai gausime, kad $x - y$ turi dalintis iš 11. Kadangi $x + y = 5$, tai $-11 < x - y < 11$, lieka tiktai variantas $x - y = 0$. Bet tokiu atveju x ir y turėtų būti arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai, o tai prieštarautų tam, kad jų suma nelyginė. $\wedge$

13. Skaičius $p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ turi $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$ daliklių. Kad daliklių skaičius būtų nelyginis, visi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ turi būti lyginiai. Tačiau tuomet skaičius bus sveikojo skaičiaus kvadratas $(p_1^{\alpha_1/2} \cdots p_n^{\alpha_n/2})^2$. $\wedge$

14. Jei trupmena $\frac{a}{b}$ yra suprastinama, tai $\text{dbd}(a, b) = d > 1$. Tada, kadangi $d|a$ ir $d|b$, tai $d|a - b$ ir $d|a + b$, vadinasi, ir trupmena $\frac{a-b}{a+b}$ bus suprastinama. Atvirkščias teiginys nėra teisingas. Iš $\text{dbd}(a - b, a + b) = d > 1$ galime gauti, kad $d|2a$ ir $d|2b$, o iš čia ir idėją kontrapavyzdžiui: $\frac{5-3}{5+3}$ suprastinama, o $\frac{5}{3}$ - ne. $\wedge$

15. Pažymėkime $\text{dbd}(a, b) = d$ ir $a = da_1$, $b = db_1$. Kadangi $d|b$, o $\text{dbd}(a_1, b) = 1$, tai $\text{mbk}(a, b) = \text{mbk}(da_1, b) = a_1 b$. Lieka patikrinti: $\wedge$

$$\text{mbk}(a, b) \cdot \text{dbd}(a, b) = d \cdot a_1 \cdot b = a \cdot b$$

16. Jei $11|3x + 7y$ ir $11|2x + 5y$, tai $11|3(2x + 5y) - 2(3x + 7y)$, t.y. $11|y$. Tačiau jei $11|2x + 5y$ ir $11|y$, tai $11|2x \implies 11|x$. Gavome, kad $11|x$ ir $11|y$, todėl tikrai $11^2|x^2 + 3y^2$. $\wedge$

17. Pažymėkime skaičiaus skaitmenų esančių lyginėse vietose sumą a ir nelyginėse b. Pagal dalumo iš 9 požymį $a + b$ turi dalintis iš 9. Pastebėkime, kad $a + b$ negali būti lygus 9, nes tada vienas iš jų turėtų būti lyginis, kitas nelyginis, ir jų skirtumas $a - b$ nebūtų lygus 0 ir nesidalintų iš 11 $(-11 < a - b < 11)$. Vadinasi, $a + b$ turi būti lygus bent 18. $\wedge$

18. Aišku, kad $n = 12! + 2$ tenkins sąlygą. ∧

19. Įvertinkime grubiai d dydį. Kadangi a yra šimtaženklis, tai b neviršys $100 \cdot 9$. ∧ Tuomet jo skaitmenų suma, c, neviršys $3 \cdot 9$, o šio skaitmenų suma, d, neviršys $2 + 9 = 11$. Pagal dalumo iš 9 požymį $9|a \implies 9|b \implies 9|c \implies 9|d$. Vienintelis teigiamas skaičius besidalijantis iš 9 ir nedidesnis už 11 yra 9.

20. Raskime paskutinį skaičiaus 27^{28} skaitmenį. 27^1 paskutinis skaitmuo 7, 27^2 - 9, ∧ 27^3 - 3, 27^4 - 1, 27^5 - 7, ... Matome, kad paskutinis skaitmuo keliant laipsniais kartojasi kas keturis, vadinasi, 28 laipsnio bus toks pat kaip ir 4, t.y. 1. Tuomet n paskutinis skaitmuo bus lygus 5, vadinasi, jis dalinsis iš 5.

21. Kadangi p pirminis, tai jokie mažesni už jį skaičiai iš p nesidalins. Tuomet iš p ∧ nesidalins ir $k!$ ir $(p-k)!$. Kadangi iš p dalinasi $p!$, t.y. trupmenos skaitiklis, bet nesidalija trupmenos vardiklis, tai suprastinus p neišsiprastins, ir gautas skaičius iš p dalinsis.

22. a) Pertvarkę $n^2 + 1 = (n-1)(n+1) + 2$ gauname, kad $\text{dbd}(n^2+1, n+1) =$ ∧ $\text{dbd}(2, n+1)$. Pastarasis bus didesnis už 1 tada, kai n bus nelyginis, o jų iki 100 bus 50.

    b) Pertvarkę $n^2 + 1 = (n-2)(n+2) + 5$ gauname, kad $\text{dbd}(n^2+1, n+2) = \text{dbd}(5, n+2)$. Pastarasis bus didesnis už 1 tada, kai $n + 2$ dalinsis iš 5. Tokių skaičių bus 20 - $3, 8, \ldots 98$.

23. Perrašykime: ∧
$$\frac{n^3+3}{n^2+7} = \frac{(n^2+7)n - 7n + 3}{n^2+7} = n - \frac{7n-3}{n^2+7}.$$
Matome, kad duotas skaičius bus sveikasis tik tada, kai sveikasis bus $\frac{7n-3}{n^2+7}$. Pastebėkime, kad kai $|n| > 6$, tai vardiklis tampa moduliu didesnis už skaitiklį, tad trupmena tikrai nebus sveikasis skaičius. Lieka patikrinti likusias reikšmes, iš kurių tinka tik $n = 2$ ir $n = 5$.

24. Pirma, aiškumo dėlei, parodysime, kad teiginys teisingas su $n = 3$ (su $n = 2$, ir ∧ $n = 1$ jis teisingas pagal dalumo iš 9 ir 3 požymius). Užrašykime
$$\underbrace{11\ldots1}_{27} = 1\underbrace{00\ldots0}_{8}1\underbrace{00\ldots0}_{8}1 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{9}.$$
Dešinėje pusėje pirmojo dauginamojo skaitmenų suma lygi 3, todėl jis dalijasi iš 3, o antrasis dauginamasis dalijasi iš 9, vadinasi, sandauga dalijasi iš 27. Bendru atveju naudosime indukciją. Užrašę
$$\underbrace{11\ldots1}_{3^n} = 1\underbrace{00\ldots0}_{3^{n-1}-1}1\underbrace{00\ldots0}_{3^{n-1}-1}1 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{3^{n-1}}$$
ir tarę, kad $\underbrace{11\ldots1}_{3^{n-1}}$ dalijasi iš 3^{n-1} gauname, kad $\underbrace{11\ldots1}_{3^n}$ dalijasi iš 3^n.

25. Iš sąlygos aišku, kad skaičius turi dalintis bent iš 2, 3 ir 5. Kadangi ieškome mažiausio tokio skaičiaus, tai galime tarti, kad daugiau pirminių daliklių skaičius neturės, nes iš to kad $2^a3^b5^cq$ tenkina sąlygą gautume ir kad $2^a3^b5^c$ tenkina sąlygą, o jis mažesnis. Pagal sąlygą $2^{a-1}3^b5^c$ turi būti kvadratas, $2^a3^{b-1}5^c$ - kubas, $2^a3^b5^{c-1}$ - penktasis laipsnis. Vadinasi $2|a-1, 2|b, 2|c, 3|a, 3|b-1, 3|c, 5|a, 5|b, 5|c-1$. Kiekvieno iš a, b, c ieškome atskirai. Mažiausias nelyginis iš 3 ir 5 besidalijantis skaičius yra 15, vadinasi $a = 15$. Analogiškai $b = 10$, $c = 6$. Gavome, kad mažiausias skaičius tenkinantis sąlygą yra $2^{15}3^{10}5^6$. ∧

26. Skaičius 75 išsiskaido kaip $3 \cdot 5 \cdot 5$, vadinasi jis turės ne daugiau kaip 3 skirtingus pirminius daliklius, iš kurių du yra 5 ir 3. Mažiausias skaičius, kurį gauname dviejų pirminių daliklių atveju yra $3^{14}5^4$, mažiausias skaičius, kurį gauname trijų pirminių daliklių atveju, yra $2^43^45^2$. Šis ir bus mažiausias. ∧

27. Pastebėkime, kad $5n+3$ užrašomas kaip $4(2n+1)-(3n+1)$. Pažymėję $2n+1 = a^2$ ir $3n+1 = b^2$ gausime, kad $5n+3$ išsiskaido kaip $(2a-b)(2a+b)$. Jis nebus pirminis, jei $2a - b > 1$. Patikrinkime atvejį, kai $2a = b + 1$. Įsistatę gausime lygčių sistemą ∧

$$\begin{cases} 2n+1 &= a^2, \\ 3n+1 &= (2a-1)^2. \end{cases}$$

Išsprendę randame vienintėlį sveikąjį sprendinį $a = 1$, $n = 0$.

28. Tarkime priešingai, kad tokių pirminių skaičių yra baigtinis skaičius. Pažymėkime juos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ir nagrinėkime skaičių $4p_1p_2\cdots p_k - 1$. Jis nesidalins iš nė vieno pirminio $p_1, \ldots, p_k$, vadinasi, visi jo pirminiai dalikliai bus pavidalo $4k+1$. Tačiau tokių daliklių ir jų laipsnių sandauga bus pavidalo $4k+1$, vadinasi, negali būti lygi $4p_1p_2\cdots p_k - 1$. Prieštara. ∧

29. Jei sudauginę gavome 1, tai priešpaskutinis skaičius turėjo būti pavidalo 1...11. Įrodysime, kad tokio tipo skaičiaus negalime gauti daugindami skaitmenis. Tam užteks parodyti, kad jis turi pirminių daliklių didesnių už 7. Išties, jei 1...11 dalijasi iš 3, tai dalijasi ir iš 111, ir iš 37. Jei 1...11 dalijasi iš 7, tai dalijasi iš 111111, ir taip pat dalijasi iš 37. Jei nesidalija nei iš 3, nei iš 7, tai tikrai dalijasi iš pirminio didesnio už juos. Vadinasi, sąlygą tenkina tik skaičiai pavidalo 1...11. ∧

30. Pastebėkime, kad pirminiai p ir q yra panašaus dydžio, t.y. $p \leqslant q+6$ ir $q \leqslant p+7$. Taip pat, p ir q negali būti labai dideli, nes bet kokio skaičiaus didžiausias daliklis neskaitant paties skaičiaus yra bent dvigubai už jį mažesnis. Pasinaudokime tuo: kadangi $p|q+6$ ir $p \geqslant q-7$, tai arba $q-7$ bus didesnis nei pusė $q+6$ ir p turės būti lygus $q+6$, arba $q-7$ bus nedidesnis nei $q+6$. Pirmuoju atveju iš $p = q+6$ gauname $q|q+13$, iš kur $q = 13$, $p = 19$. Antruoju atveju $q-7$ turi būti nedidesnis už pusę $q+6$, arba sutvarkius, $q \leqslant 20$. Vadinasi, lieka patikrinti tik q reikšmes $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Tai padaryti nesunku: nei viena iš jų, išskyrus jau rastą 13, netinka. ∧

31. Pastebėkime, kad didžiausias n daliklis neviršija n, antras pagal dydį neviršija ∧

$\frac{n}{2}$, trečias pagal dydį neviršija $\frac{n}{3}$ ir taip toliau. Tuomet gausime, kad

$$d_k d_{k-1} + \cdots + d_2 d_1 < \frac{n}{1}\frac{n}{2} + \frac{n}{3}\frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{k}\frac{n}{k+1} = n^2(\frac{1}{1}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\frac{1}{k+1}).$$

Įvertinkime sumą:

$$\frac{1}{1}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} < 1.$$

Įrodysime, kad $d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k$ dalo n^2 tada ir tik tada, kai n yra pirminis. Tarkime priešingai, tegu n sudėtinis, ir tegu p yra mažiausias pirminis n daliklis. Tuomet

$$n^2 > d_1 d_2 + d_2 d_3 + \cdots + d_{k-1} d_k > n\frac{n}{p},$$

prieštara, nes $\frac{n^2}{p}$ yra antras pagal dydį n^2 daliklis.

Lyginiai

1. a) $1+11+111+1111+11111 = 1+(9+2)+(108+3)+(1107+4)+(11106+5) \equiv 6 \pmod 9$.

   b) $555 \cdot 777 + 666 \cdot 888 \equiv 6 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \equiv 0 \pmod 9$.

   c) $3^{99} \equiv 1 \pmod 2$, $\equiv 0 \pmod 3$, $\equiv -1 \pmod 4$, $\equiv 2 \pmod 5$, $\equiv 3 \pmod 6$, $\equiv -1 \pmod 7$.

   d) $7^4 \equiv 1 \pmod{10} \implies 7^{777} \equiv 7 \pmod{10}$.

2. Įrodysime naudodamiesi apibrėžimu. Išskaidykime skirtumą:

   $$ab + cd - ad - bc = a(b-d) + c(d-b) = (a-c)(b-d).$$

   Kadangi $a - c | (a-c)(b-d)$, tai iš ties $ab + cd \equiv ad + bc \pmod{a-c}$.

3. Jei skaičius lyginis, tai jo kvadrato dalybos iš 4 liekana bus 0, jei nelyginis ($\equiv \pm 1 \pmod 4$), tai 1.

4. Išskaidykime $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Akivaizdu, kad duotas reiškinys dalijasi iš 2 ir 3. Įrodysime, kad dalijasi ir iš 5. Jei n lygsta 1, 0 arba -1, tai tuomet iš 5 dalijasi atitinkamai $n-1$, n, $n+1$, o jei n lygsta ± 2 moduliu 5 tai iš 5 dalijasi n^2+1 ($n^2 + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 0 \pmod 5$).

5. Dalindami kvadratą iš trijų gausime tiktai liekanas 0 arba 1. Jas sumuojant nulį galima gauti vieninteliu būdu, kai abu dėmenys lygūs 0.

6. Dalindami kvadratą iš septynių, gausime liekanas 0, 1, 2 arba 4. Kaip ir praeitame uždavinyje, jas sumuojant, nulį galima gauti tik, kai abu dėmenys lygūs 0.

7. Nelyginis skaičius moduliu 8 gali duoti liekanas ± 1 ir ± 3. Tuomet jo kvadratas duos liekanas $(\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 8$ ir $(\pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8$.

8. Kadangi $6|x^3 - x$, tai $x^3 \equiv x \pmod 6$. Tuomet ir $a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c \pmod 6$.

9. Kadangi a nesidalija iš 2 tai $a \equiv \pm 1 \pmod 8$ arba $a \equiv \pm 3 \pmod 8$. Abiem atvejais pakėlę abi lygybės puses kvadratu gauname $a^2 \equiv 1 \pmod 8$. Analogiškai, kadangi a nesidalija iš 3, tai $a \equiv \pm 1 \pmod 3$, vadinasi $a^2 \equiv 1 \pmod 3$. Gavome, kad $a^2 - 1$ dalijasi iš 3 ir 8, vadinasi, $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

10. Kvadratai duoda liekanas $1, 0$ moduliu 4, o dviejų nelyginių skaičių kvadratų suma duoda liekaną 2.

11. Išskaidykime - $5 \cdot 3 \cdot 2^3 | n(n^2+1)(n+1)(n-1)$. Nesunku įsitikinti, kad su visomis n reikšmėmis $n(n^2+1)(n+1)(n-1)$ dalijasi iš 5 ir 3. Patikrinkime, kada dalijasi iš 8. Kai n nelyginis, tai trys dauginamieji $(n^2+1)(n+1)(n-1)$ lyginiai, todėl iš 8 dalinsis. Kai n lyginis, tai vienintėlis lyginis dauginamasis yra n, vadinasi sandauga dalinsis iš 8 kai n dalinsis iš 8. Gavome, kad $120|(n^5 - n)$, kai su visomis nelyginėmis ir iš aštuonių besidalijančiomis reikšmėmis.

12. Jei abu pirminiai p ir q nesidalija iš 3, tai jų kvadratai lygsta 1 moduliu 3. Tačiau tuomet $p^2 - 2q^2 \equiv 1 - 2 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod 3$. Vadinasi bent vienas iš jų dalijasi iš trijų, t.y. yra lygus trims. Patikriname: su $q = 3$ sprendinių nėra, o su $p = 3$ gauname $q = 2$.

13. Iš pradžių raskime, su kuriomis n reikšmėmis duotas daugianaris dalijasi iš 11. Tam užtenka perrinkti 11 liekanų - gausime, kad tinka tik $n \equiv 4 \pmod{11}$. Įstatę $n = 11k + 4$ gausime $11^2k^2 + 11^2k + 33$, kas su jokia k reikšme nesidalija iš 121.

14. Užrašykime reiškinį kaip $(10-1)(10^{n-1} + \cdots + 10 + 1) + 45n$. Padalįję iš 9 matome, kad dalmuo dar dalijasi iš 3: $10^{n-1} + \cdots + 10 + 1 + 5n \equiv 1 + 1 + \cdots 1 + 5n \equiv 6n \equiv 0 \pmod 3$.

15. Pastebėkime, kad su bet kuriuo k yra teisinga $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 9$. Tuomet

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n - 1 \cdot 10 + a_n \equiv a_1 + a_2 + \cdots a_n \pmod 9.$$

16. Perrašykime sąlygą kaip $n|a - b$. Aišku, kad jei $d|n$ ir $d|a$, tai d turi dalinti ir b. Lygiai taip pat, jei $d|n$ ir $d|b$, tai d turi dalinti ir a. Vadinasi iš ties $\mathrm{dbd}(a, n) = \mathrm{dbd}(b, n)$.

17. Pastebėję, kad $899 = 900 - 1 = (30-1)(30+1)$ galime ieškoti, su kuriomis n reikšmėmis duotas reiškinys dalijasi iš 29 ir 31 atskirai. Kadangi $36^n \equiv 7^n \pmod{29}$ ir $24^n \equiv (-5)^n \pmod{29}$, tai

$$36^n + 24^n - 7^n - 5^n \equiv (-5)^n - 5^n \pmod{29},$$

ir lygsta nuliui, kai n lyginis. Analogiškai

$$36^n + 24^n - 7^n - 5^n \equiv (-7)^n - 7^n \pmod{31},$$

ir lygsta nuliui taip pat, kai n lyginis. Vadinasi duotas reiškinys dalinsis iš 899 su visomis lyginėmis n reikšmėmis.

18. Žinome, kad $p|\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$, su visomis reikšmėmis $0 < k < p$, todėl

$$
\begin{aligned}
(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \cdots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + b^p &\equiv a^p + 0 + \cdots + 0 + b^p \\
&\equiv a^p + b^p \pmod{p}.
\end{aligned}
$$

19. Iš $x + y \equiv x \pmod{y}$ seka $(x+y)^n \equiv x^n \pmod{y}$. Jei daugianarį q užsirašysime kaip $q(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$, tai gausime, kad

$$a_n(x+y)^n + \ldots a_1(x+y) + a_0 \equiv a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 \pmod{y}.$$

20. Raskime skaičiaus $1010\cdots101$ dalybos iš 9999 liekaną. Tai padaryti labai paprasta pastebėjus, kad skaičius užrašomas kaip $10^0 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + \cdots$, ir kad $10^4 \equiv 1 \pmod{9999}$. Tuomet dalybos liekana bus $1+100+1+100+\cdots$. Kadangi $9999 = 101 \cdot 99$, tai norint, kad liekana būtų 9999 kartotinis reikės $99k$ dėmenų $1 + 100$. Vadinasi, skaičius turės $4 \cdot 99k - 1$ skaitmenį.

21. Parodysime, kad tinka tik $p = 2, 3, 5$. Nesunku įsitikinti, kad šios reikšmės tinka, o $p = 7, 11$ netinka, tad tarkime, kad $p > 11$ ir tuomet $11+p^2 > 144$. Pastebėkime, kad $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ir $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$, todėl $p^2 + 11 \equiv 0 \pmod{12}$. Iš čia seka, kad $p^2 + 11$ turi daliklius $1, 2, 3, 4, 6, 12$ ir $\frac{p^2+11}{1}, \ldots, \frac{p^2+11}{12}$, taigi daugiau nei 11.

Oilerio teorema

1. Taikykime mažąją Ferma teoremą. Pagal ją $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, $7^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ ir $9^{18} \equiv 1 \pmod{19}$. Skaičiuojame:

$$3^{33} \equiv 3^{2 \cdot 12} 3^9 \equiv 3^7 \equiv 27 \cdot 27 \cdot 27 \equiv 1 \pmod{13},$$

$$7^{77} \equiv 7^{4 \cdot 16} 7^{13} \equiv 7^{13} \equiv 49^6 \cdot 7 \equiv (-2)^6 \cdot 7 \equiv 6 \pmod{17},$$

$$9^{99} \equiv 9^{5 \cdot 18} 9^9 \equiv 81^4 \cdot 9 \equiv 5^4 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{19}.$$

2. Pagal Oilerio teoremą $11^8 \equiv 1 \pmod{15}$ (11 ir 15 tarpusavyje pirminiai, $\varphi(15) = 8$). Raskime, kokią liekaną gausime dalindami laipsnį 11^{11} iš 8. Kadangi $\varphi(8) = 4$, tai

$$11^{11} \equiv 11^3 \equiv 3^3 \equiv 3 \pmod{8}.$$

Tuomet

$$11^{11^{11}} \equiv 11^3 \equiv (-4)^3 \equiv 11 \pmod{15}.$$

3. Prisiminkime, kad jei $a \equiv b \pmod{n}$, tai $\mathrm{dbd}(a, n) = \mathrm{dbd}(b, n)$. Tuomet aišku, kad jei $\mathrm{dbd}(a, n) > 1$, tai $\mathrm{dbd}(a^n) > 1$ ir $a^n \not\equiv 1 \pmod{n}$, nes $\mathrm{dbd}(1, n) = 1$.

4. Pagal mažąją Ferma teoremą $n^{pq} \equiv n^p \pmod{q}$ ir $n^q \equiv n \pmod{q}$, todėl $n^{pq} - n^p - n^q + n \equiv 0 \pmod{q}$. Analogiškai ir $n^{pq} - n^p - n^q + n \equiv 0 \pmod{p}$.

5. Įrodysime, kad $a^{47} + b^{57} + c^{47}$ dalijasi iš 2 ir iš 47, todėl nėra pirminis. Kadangi keliant laipsniu skaičiaus lyginumas nesikeičia, tai aišku, kad jei skaičių suma buvo lyginė, tai ir 47-tųjų laipsnių suma taip pat bus lyginė. O pagal mažąją Ferma teoremą turime $x^47 \equiv x \pmod{47}$, todėl $a^{47} + b^{57} + c^{47} \equiv a + b + c \equiv 0 \pmod{47}$.

6. Teiginys teisingas atveju $p = 3$ (pakanka imti skaičius, kurių skaitmenų skaičius dalijasi iš 3), tad tarsime, kad $p \geqslant 7$. Perrašykime $11\ldots11$ kaip $\frac{10^n-1}{9}$, kur n - skaitmenų skaičius. Kadangi vardiklis nesidalija iš nagrinėjamo pirminio p, tai pakanka parodyti, kad su be galo daug n reikšmių $10^n - 1$ dalijasi iš p. Pagal sąlygą $\mathrm{dbd}(10, p) = 1$, todėl galime taikyti mažąją Ferma teoremą. Gausime $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ir tuo pačiu, $10^{(p-1)k} \equiv 1 \pmod{p}$, vadinasi $11\ldots11$ dalinsis iš p kai tik skaitmenų skaičius dalinsis iš $p - 1$.

7. Pastebėkime, kad pagal Oilerio teoremą tiks bet koks n, kuris yra tarpusavyje pirminis su 2003 ir tenkina $\varphi(n)|n$. Abu kriterijus tenkina dvejeto laipsniai 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

8. Pažiūrėkime, kokius skaitmenis galime naudoti, norėdami negauti sudėtinio skaičiaus. 9 negalima naudoti pagal sąlygą, taip pat netiks 2, 4, 5, 6, 8 ir 0, tad lieka tik 1, 3 ir 7. Vienetas ir septynetas duoda liekaną 1 moduliu 3, todėl juos daugiausia galėsime užrašyti du kartus, kitaip skaitmenų suma dalinsis iš 3 ir skaičius bus sudėtinis. Vadinasi, nuo kažkurios vietos visi skaitmenys turės būti trejetai. Skaičių iki tos vietos pažymėję A turėsime, kad A yra pirminis, bet žinome, kad kiekvienam pirminiam egzistuoja pavidalo $11\ldots11$ (o todėl ir pavidalo $33\ldots33$) skaičius, besidalinantis iš to pirminio. Vadinasi, po kažkurio trejeto prirašymo gausime skaičių besidalijantį iš A, t.y. sudėtinį.

9. Tegu p pirminis $a_1 1 + a_2 2 + \cdots + a_m m$ daliklis. Pagal mažąją Ferma teoremą $a^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$, todėl $a_1 1^n + a_2 2^n + \cdots + a_m m^n$ dalinsis iš p su visomis $n = k(p-1) + 1, k = 1, 2, \ldots$ reikšmėmis.

10. Įsistatę $n = p$ gausime $f(p)^p \equiv p \pmod{f(p)}$, arba $p \equiv 0 \pmod{f(p)} \implies f(p) = p$ arba $f(p) = 1$. Pastebėkime, kad jei kažkokiai reikšmei $f(n) \neq n$, tai $f(p) = p$ gali galioti tik baigtiniam skaičiui pirminių, nes kiekvienam iš jų yra teisinga $f(n)^p \equiv n \pmod{p} \implies f(n) \equiv n \pmod{p} \implies p|f(n) - n$. Vadinasi, tiks arba funkcija $f(n) = n$, arba funkcijos, kurios baigtiniam skaičiui pirminių $p_1, \ldots p_k$ tenkina $f(p_k) = p_k$, visiems kitiems pirminiams $f(p) = 1$, o sudėtiniams a turi galioti $f(a) \equiv a \pmod{p_i}$, $i = 1 \ldots k$. $f(p)|p$, $f(p) = p$ tik baigtinį skaičių kartų, $p|f(n) - n$.

11. Parodysime, kad kiekvienam pirminiam p atsiras toks n, kad $p|a_n$. Atvejai $p = 2$ (tinka visos n reikšmės) ir $p = 3$ (tinka lyginės n reikšmės) paprasti, tad tarkime, kad $p \geqslant 5$. Spėjame, kad $p|a_{p-2}$. Kad galėtume taikyti mažąją Ferma teoremą padauginkime a_{p-2} iš 6 (kadangi $p \geqslant 5$, tai $p|a_{p-2} \iff p|6a_{p-2}$):

$$6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 2 + 3 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Kinų liekanų teorema

1. Pirmojoje sistemoje iš pirmos lygties gauname, kad ieškomas r dalinasi iš 5. Iš antros lygties žinome, kad jis taip pat turi būti lygus $7k+4$. Peržvelgę pirmąsias reikšmes randame, kad tinka 25, o jis taip pat tenkina ir trečiąją lygtį. ∧

   Antrąją sistemą sutvarkome kaip ir pavyzdyje. Pirmą lygtį dauginame iš 2, antrą iš 5, trečią iš 4. Gausime sistemą

$$\begin{cases} r \equiv 2 \pmod{5}, \\ r \equiv 5 \pmod{7}, \\ r \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

   Pirmas dvi lygtis tenkina $r = 12$, tačiau ši reikšmė netenkina trečios. Kitą pirmųjų dviejų lygčių sprendinį rasime prie 12 pridėję $5 \cdot 7$, bet ir šis netiks. Vėl ir vėl pridėdami po 35 galiausiai rasime, kad tinka $r = 257$.

   Nemažai pasidarbavus, iš karto kyla minčių, kaip buvo galima procesą pagreitinti. Pirma, galima buvo nepertvarkyti lygties, o pažymėti $3r = x$ ir ieškoti tokio sprendinio, kuris dalijasi iš 3. tai gana paprasta, nes pradinės lygties sprendiniai yra $1 + 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot k$. Antra, kadangi $12 \equiv 1 \pmod{11}$, o pridėdavome po $35 \equiv 2 \pmod{11}$, tai galėjome iš karto suskaičiuoti, kad $4 \pmod{11}$ gausime pridėję 35 septynis kartus.

2. Kadangi 450 išsiskaido kaip $9 \cdot 50$, tai užteks rasti liekanas atskirai moduliu 9 ir 50 ir pasinaudoti kinų liekanų teorema. Liekana moduliu 50 yra 9, o moduliu 9 $1+2+\cdots+2009 = \frac{2009\cdot 2010}{2} \equiv \frac{2\cdot 3}{2} \equiv 3$. Nesunku atspėti, kad abu lyginius tenkina 309. ∧

3. Pagal mažąją Ferma teoremą $5x^{13} + 13x^5 + 9ax \equiv 5x + 9ax \pmod{13}$ ir $5x^{13} + 13x^5 + 9ax \equiv 13x + 9ax \pmod{5}$. Vadinasi, kad daugianaris dalintųsi iš 65 su visomis x reikšmėmis, $5 + 9a$ turi dalintis iš 13, ir $13 + 9a$ iš penkių. Gauname lyginių sistemą, kurią galima spręsti įprastai, pažymėjus $9a = t$, bet verčiau šiek tiek pagudrauti. Padauginę pirmos lygties abi puses iš dviejų, gausime $18a \equiv -10 \pmod{13}$, arba, $a \equiv -2 \pmod{13}$. Padauginę antros lygties abi puses iš 4, gausime $36a \equiv -3 \cdot 4 \pmod{5}$, arba, $a \equiv -2 \pmod{5}$. Matome, kad $a = -2$ yra sprendinys, tačiau mums reikia natūraliojo. Mažiausias toks pagal kinų liekanų teoremą bus $-2 + 65 = 63$. ∧

4. Užrašykime $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kur p_k didžiausias pirminis neviršijantis 1997. Skaičius a bus natūraliojo skaičiaus laipsnis, jei visi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ dalinsis iš kažkokio pirminio q_1. Skaičius $2a$ bus natūraliojo skaičiaus laipsnis, jei visi skaičiai $\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ dalinsis iš kažkokio pirminio q_2. Taip tęsdami, kiekvienam α_i gausime 1997 lyginių sistemą, kuri pagal kinų liekanų teoremą turės sprendinį. Radę visus α_i rasime ir a, tad natūralusis skaičius tenkinantis sąlygą egzistuoja. ∧

5. Pastebėkime, kad kiekvienam n užteks rasti skaičių r, su kuriuo $r(r+1) + 1 = r^2 + r + 1$ turėtų bent n skirtingų pirminių daliklių. ∧

Jei $p_1|r_1^2+r_1+1$, $p_2|r_2^2+r_2+1$, ...$p_n|r_n^2+r_n+1$, tai pagal Kinų liekanų teoremą radę tokį r, kad

$$\begin{cases} r \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ r \equiv r_2 \pmod{p_2} \\ \dots \\ r \equiv r_n \pmod{p_n} \end{cases}$$

Turėsime $p_1p_2\cdots p_n|r^2+r+1$. Lieka įrodyti, kad daugianaris x^2+x+1 turi be galo daug pirminių daliklių (daugianario $p(x)$ daliklis yra skaičius p, kuriam egzistuoja toks a, kad $p|p(a)$). Tarkime priešingai, tegu daugianaris x^2+x+1 turi baigtinį skaičių pirminių daliklių. Analogiškai naudodamiesi Kinų liekanų teorema rasime tokį x_0, kad $x_0^2+x_0+1$ dalintųsi iš jų visų. Tačiau tuomet $(x_0+1)^2+(x_0+1)+1$ nesidalins nė iš vieno, o taip būti negali.

6. Taškas bus nematomas, jei jo koordinatės nėra tarpusavyje pirminiai skaičiai, t.y. turi bendrą daliklį. Tuo ir pasinaudosime. Tegu $p_1, p_{(n+1)^2}$ skirtingi pirminiai skaičiai. Pagal kinų liekanų teoremą, lyginių sistema turės sprendinį:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{p_1} \\ y \equiv 0 \pmod{p_1} \\ x \equiv 0 \pmod{p_2} \\ y+1 \equiv 0 \pmod{p_2} \\ \dots \\ x \equiv 0 \pmod{p_{n+1}} \\ y+n \equiv 0 \pmod{p_{n+1}} \\ \dots \\ x+n \equiv 0 \pmod{p_{(n+1^2)}} \\ x+n \equiv 0 \pmod{p_{(n+1)^2}} \end{cases}$$

Aišku, kad kvadrato, kurio apatinis kairysis kampas yra sistemos sprendinys (x, y), o kraštinės ilgis n, kiekvieno vidaus taško koordinačių pora turi bendrą daliklį, t.y. taškas yra nematomas.

Liekanų grupė

1. Generatoriai bus keturi - 2, 6, 7 ir 8.

2. Tarkime priešingai, kad liekanos a eilė d yra mažesnė už jos atvirkštinės a^{-1} eilę d'. Tačiau tuomet $(a^{-1})^d \equiv (a^d)^{-1} \equiv 1^{-1} \equiv 1$ - prieštara.

3. Grupės nesudarys, nes liekanos, kurios nėra tarpusavyje pirminės su n, neturi atvirkštinių liekanų.

4. Sudėtiniams skaičiams negalioja teiginys, kad jei x yra daugianario $(a-x)q(x)$ šaknis, tai x būtinai yra arba $a-x$ šaknis arba $q(x)$ šaknis. Būtent tai ir matome duotuoju atveju - daugianario $x^2+x = x(x+1)$ šaknimis yra 2 ir 3, nors šios liekanos nėra nei vieno iš daugianarių x ir $x+1$ šaknys.

5. Jei a eilė būtų mažesnė nei $p-1$, tai ji, būdama $p-1$ daliklis, būtų ir $\frac{p-1}{q}$ daliklis su kažkokiu q, o tada ir $a^{\frac{p-1}{q}}$ lygtų 1. Kadangi taip nėra, tai a turi būtinai būti generatorius. Į kitą pusę teiginys akivaizdus - jei a generatorius, tai, žinoma, keldami jo laipsniu, mažesniu nei $p-1$, negausime 1.

6. Tegu g generatorius. Iš prieš tai buvusio uždavinio gauname, kad tie generatoriaus laipsniai, kurie yra tarpusavyje pirminiai su $p-1$ bus generatoriai, o tie, kurie nėra, nebus. Iš viso tarpusavyje pirminių laipsnių bus $\varphi(p-1)$ (tarp kurių ir g^1), vadinasi, tiek bus ir generatorių.

7. Jei 2 nebūtų generatorius, tai jis turėtų tenkinti $2^{14} \equiv 1$ arba $2^4 \equiv 1 \pmod{29}$, bet taip nėra - $2^{14} \equiv -1 \pmod{29}$ ir $2^4 \equiv 16 \pmod{29}$.

   a) Ieškosime sprendinių pavidalo 2^k. Kadangi 2 yra generatorius, tai 2^{7k} lygs vienetui tik tada, kai $7k$ dalinsis iš 28. Taip bus atvejais $x = 2^4$, $x = 2^8$, $x = 2^{12}$, $x = 2^{16}$, $x = 2^{20}$, $x = 2^{24}$ ir $x = 2^{28}$.

   b) Visi duotos lygties sprendiniai bus ir lygties $(x-1)(x^6 + x^5 + \cdots + x + 1) \equiv 0 \pmod{29}$, t.y. $x^7 \equiv 1 \pmod{29}$ sprendiniais. Šios lygties sprendinius gavome a) dalyje, lieka tik iš jų išmesti $2^{28} \equiv 1$.

8. Generatoriaus atvirkštinė liekana taip pat bus generatorius, tad jų sandauga bus lygi 1, nebent atsiras generatorių, kurie yra sau atvirkštiniai. Tokios liekanos yra tik 1 ir -1. Pirmoji iš jų niekada nebus generatorius, o -1 yra generatorius tik liekanų grupės moduliu 3. Pastebėkime, kad $\varphi(p-1)$ įgyja nelyginę reikšmę taip pat tik kai $p-1=2$.

9. Lygties sprendiniai bus tie, kurių eilė moduliu 19 dalins 17. Kadangi elementų eilė turi dalinti dar ir grupės eilę (t.y. 18), tai tiks tik $x = 1$.

10. Atveju kai $p-1$ dalo k pagal mažąją Ferma teoremą, gausime $1^k + 2^k + ... + (p-1)^k \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv p - 1 \equiv -1 \pmod{p}$. Atveju, kai $p-1$ nedalo k pasinaudosime tuo, kad liekanų grupė moduliu p yra ciklinė. Generatorių pažymėję g, nagrinėjamą sumą galime perrašyti kaip $1 + g^k + g^{2k} + g^{3k} + \cdots + g^{(p-2)k}$. Susumavę gausime $\frac{(g^k)^{p-1}-1}{g^k-1}$. Pagal mažąją Ferma teoremą skaitiklis lygus nuliui, o vardiklis, kadangi $p-1$ nedalo k, nelygus.

11. Grupės moduliu p eilė yra 2^n, vadinasi, bet kurio elemento eilė bus dvejeto laipsnis. Jei kuris nors nelyginis generatoriaus g laipsnis g^N nebūtų generatorius, tai jo eilė būtų lygi $2^{n-\epsilon}$. Tačiau tuomet gautume, kad $g^{2^{n-\epsilon}(N)} \equiv 1$, kas negali būti teisinga, nes $2^n \nmid 2^{n-\epsilon}N$. Jei tarsime, kad 3 nėra generatorius, tai pagal a) dalį jis turės būti lyginis generatoriaus laipsnis, kaip ir -1, kuris irgi nėra generatorius. Vadinasi, sandauga -3 bus lyginis generatoriaus laipsnis, t.y. kvadratas. Norėdami įrodyti c) dalies tvirtinimą pakelkime duotą lygybę kubu ir pasinaudokime b) dalimi. Gausime

$$8u^3 \equiv (a-1)(a^2 - 2a + 1) \equiv (a-1)(-2a-2) \equiv -2(a^2-1) \equiv -8 \pmod{p}.$$

    Suprastinę iš 8 (p nelyginis) gausime $u^3 \equiv 1 \pmod{p}$. Bet trečios eilės elementų grupė turėti negali, nes $3 \nmid 2^n$, prieštara.

12. Pirmiausia pakelkime $a+1$ šeštuoju laipsniu ir įsitikinkime, kad gausime 1: $\wedge$

$$(a+1)^6 \equiv (a^3 + 3(a^2+a+1) - 2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Lieka įsitikinti, kad $a+1$ eilė negali būti 2 arba 3. Išties, antros eilės elementas yra tik -1, tad šiuo atveju a būtų lygus -2, o $(-2)^3 \equiv -8 \not\equiv 1 \pmod{p}$. Trečios eilės negali būti, nes, kaip jau matėme, $(a+1)^3 \equiv -1 \pmod{p}$.

13. Ši grupė turi bent tris antros eilės liekanas. Viena iš jų -1, o kitos dvi tenkina lyginių sistemas: $\wedge$

$$\begin{cases} r_1 \equiv 1 \pmod{p}, \\ r_1 \equiv -1 \pmod{q}; \end{cases} \quad \begin{cases} r_2 \equiv -1 \pmod{p}, \\ r_2 \equiv 1 \pmod{q}. \end{cases}$$

Parodysime, kad ciklinė grupė negali turėti antros eilės liekanų be -1. Iš ties, tegu grupės eilė $2k$ ir $g^a \equiv -1$, kur $a \neq k$ ir $a < 2k$. Tuomet $g^{2a} \equiv 1$ ir $g^{2k} \equiv 1$, vadinasi ir $g^{2a-2k} \equiv 1$ - prieštara, nes $0 < |2a - 2k| < 2k$.

14. Pastebėję, kad lyginės n reikšmės tikrai netinka, uždavinį galime performuluoti taip: įrodykite, kad dvejeto eilė moduliu n nedalo n. Iš pirmo žvilgsnio tai atrodo kiek keista, nes dvejeto eilė dalo $\varphi(n)$, o $\varphi(n)$ ir n turi gana didelį bedrą daliklį. Nepaisant to, parodysime, kad dvejeto eilė dalijasi bent iš vieno skaičiaus, iš kurio nesidalija n. Pažymėkime p_0 mažiausią pirminį n daliklį. Jei $2^a \equiv 1 \pmod{n}$, tai $2^a \equiv 1 \pmod{p_0}$. Dvejeto eilė moduliu p_0 yra $p_0 - 1$ daliklis, iš kurio, aišku, turi dalintis a, bet iš kurio nesidalins n, nes jis mažesnis už mažiausiąjį p_0. $\wedge$

15. Pirma, teiginį įrodykime pirminių skaičių laipsniams. Jei $p \geqslant 3$ pirminis, tai jo liekanų, tarpusavyje pirminių su p^α grupė yra ciklinė, todėl visas sumoje esančias liekanas galime užrašyti kaip $1, g, g^2, \ldots, g^{\varphi(p^\alpha)-1}$. Tuomet jų kubų suma bus lygi $\wedge$

$$1 + g^3 + g^{3 \cdot 2} + \cdots g^{3(\varphi(p^\alpha)-1)} = \frac{(g^3)^{\varphi(p^\alpha)} - 1}{g^3 - 1}.$$

Pagal Oilerio teoremą, skaitiklis lygus nuliui, o vardiklis nuliui nelygus, vadinasi, suma tikrai dalinsis iš p^α. Su dvejeto laipsniais samprotausime kiek kitaip: visas liekanas, tarpusavyje pirmines su 2^α (t.y. nelygines), pakėlę kubu gausime tą patį liekanų rinkinį. Išties, nelyginės liekanos kubas bus nelyginė liekana, o jei $a^3 \equiv b^3 \pmod{2^\alpha}$ tai $(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv 0 \pmod{2^\alpha} \implies a \equiv b \pmod{2^\alpha}$, nes a^2+ab+b^2 -nelyginis. Lieka pastebėti, kad visų nelyginių liekanų moduliu 2^α suma bus nulis - tam pakanka sumuoti poromis mažiausią su didžiausia, antrą su priešpaskutine ir t.t.

Bendru atveju išskaidykime n dauginamaisiais: $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Įrodysime, kad nagrinėjama suma dalijasi iš kiekvieno pirminio laipsnio $p_i^{\alpha_i}$. Tam nagrinėkime ją moduliu $p_i^{\alpha_i}$. Iš viso sumoje yra $\varphi(n)$ dėmenų, tad moduliu $p_i^{\alpha_i}$ dauguma jų sutaps. Pasinaudoję kinų liekanų teorema įsitikinsime, kad sutaps „taisyklingai", t.y. kiekvieną liekaną gausime lygiai $\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_i^{\alpha_i})}$ kartų. Išties, liekaną i gausime iš tų ir tik iš tų skaičių x, kurie tenkins lyginių sistemą:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{2^\alpha} \\ x \equiv r_2 \pmod{p_1^{\alpha_1}} \\ \vdots \\ x \equiv i \pmod{p_i^{\alpha_i}} \vdots \\ x \equiv r_k \pmod{m_k}, \end{cases}$$

kur r_j bet kokios liekanos tarpusavyje pirminės su p_j. Kadangi kiekvienam i tokių sistemų bus po tiek pat, tai ir liekanų moduliu n teks po tiek pat. Tačiau tuomet suma moduliu $p_i^{\alpha_i}$ bus lygi $\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_i^{\alpha_i})} \cdot 0$ pagal tai, ką įrodėme anksčiau.

16. Aišku, kad daugianariai $q(x) = 1$ ir $q(x) = -1$ tenkina sąlygą. Parodysime, kad jokių kitų sąlygą tenkinantis daugianaris įgyti negali. Tarkime priešingai, tegu $q(a) \neq \pm 1$. Tada $q(a)$ dalijasi iš kažkokio nelyginio pirminio (iš 2 dalintis negali, nes $2^n - 1$ nelyginis), kurį pažymėkime p. Pastebėkime, kad tuomet visoms sveikoms k reikšmėms $q(a + pk)$ dalinsis iš p, vadinasi ir $2^{a+pk} - 1$ dalinsis iš p. Tačiau to būti negali, nes jei $2^a \equiv 1 \pmod{p}$, tai $2^{a+p} \equiv 2^a 2^{p-1} 2 \equiv 2 \pmod{p}$.

17. Jei $p = 2$, tai $q | 4 + 2^q \implies 4 + 2 \equiv 0 \pmod{q} \implies q = 2, 3$. Abu atvejai tinka. Tegu $p, q > 2$. Iš $2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{p}$ pagal mažąją Ferma teoremą seka $2 + 2^q \equiv 0 \pmod{p} \implies 2^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Pažymėkime $ord_p(2)$ liekanos 2 eilę moduliu p. Tuomet $2^{ord_p(2)/2} \equiv -1 \pmod{p}$, todėl iš $2^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$ seka $q - 1 = ord_p(2)/2m$, kur m - nelyginis. Kadangi elemento eilė dalo grupės eilę, tai $ord_p(2) | p - 1 \implies 2(q-1) | (p-1)m$. Analogiškai gauname ir $2(p-1) | (q-1)m'$. Pažymėję r ir s didžiausius dvejeto laipsnius iš kurių dalijasi $q-1$ ir $p-1$ gauname $r > s$ ir $s > r$ - prieštara.

18. Įrodysime, kad $x^{2^n} + y^{2^n}$ su kažkokiu n dalijasi iš $257 = 2^8 + 1$. Nagrinėkime $z = x \cdot y^{-1}$ kaip grupės moduliu 257 liekaną. Kadangi šios grupės eilė yra 2^8, tai z eilė bus 2^s, kur $2 \leqslant s \leqslant 8$ ($s \neq 0$, nes $x \not\equiv y \pmod{257}$ ir $s \neq 1$, nes $x \not\equiv -y \pmod{257}$ dėl apribojimo $2 \leqslant x, y \leqslant 100$). Tuomet $z^{2^{s-1}} \equiv -1 \implies x^{2^{s-1}} + y^{2^{s-1}} \equiv 0$. Lieka patikrinti, ar $x^{2^{s-1}} + y^{2^{s-1}}$ nėra tiesiog lygus 257. Vienintelis atvejis, kai taip gali nutikti, yra $1^2 + 16^2$, bet jis netenkina sąlygos $x, y \geqslant 2$.

19. Ieškokime skaičių m ir n užrašomų kaip $m = ad$ ir $n = bd$, kur d tarpusavyje pirminis su a ir su b. Tuomet sąlygos $a \nmid n, b \nmid m$ bus tenkinamos, o $m | n^2 + n, n | m^2 + m$ persirašys kaip $a | bd + 1$ ir $b | ad + 1$, arba

$$\begin{cases} bd \equiv -1 \pmod{a}, \\ ad \equiv -1 \pmod{b}. \end{cases}$$

Kadangi a ir b tarpusavyje pirminiai, tai lyginių sistemą galime perrašyti kaip

$$\begin{cases} d \equiv -b^{-1} \pmod{a}, \\ d \equiv -a^{-1} \pmod{b}. \end{cases}$$

Pastaroji turi sprendinį pagal Kinų liekanų teoremą, vadinasi ieškomi m ir n tikrai egzistuoja.

20. Tegu p - mažiausias n daliklis. Įrodysime, kad jis lygus septyniems. Pastebėkime, kad p negali būti lygus 2 ir 3, nes $p|3^n+4^n$. Pagal mažąją Ferma teoremą $p|4^{p-1}-3^{p-1}$ ir iš sąlygos $p|4^{2n}-3^{2n}$, todėl ∧

$$p|\operatorname{dbd}(4^{2n}-3^{2n}, 4^{p-1}-3^{p-1}) = 4^{\operatorname{dbd}(2n,p-1)} - 3^{\operatorname{dbd}(2n,p-1)}.$$

Kadangi $\operatorname{dbd}(2n, p-1) = 2$, tai $p|4^2-3^2 \implies p=7$.

21. Kadangi liekanų pavidalo $a^n \pmod p$, kur $\operatorname{dbd}(a,p)$ yra $\frac{p-1}{\operatorname{dbd}(p-1,n)}$, tai lygtis turės sprendinių, jei $\operatorname{dbd}(p-1,3)$ arba $\operatorname{dbd}(p-1,37)$ bus lygus 1. Kad taip nebūtų, $p-1$ turi dalintis iš 3 ir iš 37, bet tuomet p bus didesnis už 100. ∧

Kvadratinės liekanos

1. Skaičiuokime: ∧

$$\left(\frac{79}{101}\right) = \left(\frac{101}{79}\right) = \left(\frac{22}{79}\right) = \left(\frac{2}{79}\right)\left(\frac{11}{79}\right) = -\left(\frac{79}{11}\right) = -\left(\frac{2}{11}\right) = 1.$$

2. Jei $p|a^2+12$, tai $a^2 \equiv -12 \pmod p$. Ieškome moduliu kurių pirminių p, liekana -12 bus kvadratinė: ∧

$$\left(\frac{-12}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^2\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right).$$

3. Kvadratinėmis bus lyginiai generatoriaus laipsniai, o nekvadratinėmis - nelyginiai, tad tikrai pusė bus tokių ir pusė kitokių. ∧

4. Palikę nuošalyje atvejus $p=2$ ir $p=3$ ieškome kitų: ∧

$$\left(\frac{6}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right).$$

Sandauga bus lygi 1 kai $p \equiv 1,3 \pmod 8$ ir $p \equiv 1 \pmod 3$, arba kai $p \equiv 5,7 \pmod 8$ ir $p \equiv 2 \pmod 3$. Sujungę gauname, kad tiks $p \equiv \pm 1 \pmod{24}$ ir $p \equiv \pm 5 \pmod{24}$.

5. Skaičius N dalinsis iš 2 ir 3 bet nesidalins iš 4, todėl $N-1 \equiv 2 \pmod 3$ ir $N+1 \equiv 3 \pmod 4$. Tačiau nei 2 moduliu 3, nei 3 moduliu 4 nėra kvadratinės liekanos. ∧

6. Pakanka perrašyti lygtį kaip $(x+\frac{b}{2a})^2 \equiv \frac{b^2-4ac}{4a^2} \pmod p$. ∧

7. Daugianario reikšmės visuomet nelyginės, tad pakaks nagrinėti moduliu kurio nelyginio pirminio diskriminantas -67 yra kvadratinė liekana. Pirmasis toks pirminis bus 17, ir jis tikrai daugianarį dalins, pavyzdžiui, kai įstatysime reikšmę $n=-2$. ∧

8. Įrodysime, kad jei $p|a^2+b^2$, tai $p|a$ ir $p|b$. Tarkime priešingai, tegu, pavyzdžiui, $p \nmid b$. Tuomet iš $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod p$ gausime $(ab^{-1})^2 \equiv -1 \pmod p$ - prieštara, nes -1 nėra kvadratinė liekana moduliu pirminių duodančių liekaną 3 moduliu 4. ∧

9. Imkime bet kurį pirminį n daliklį q. Jei q nelyginis, tai pagal kvadratinio apverčiamumo teoremą $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{2n\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{q}\right) = 1$. Jei q lyginis, t.y. 2, tai tuomet $p \equiv 1 \pmod 8$ ir $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.Kadangi bet koks n daliklis bus sandauga pirminių daliklių, t.y. kvadratinių liekanų, tai ir jis pats bus kvadratinė liekana.

10. Nagrinėkime du atvejus. Kai $p = 4k + 3$, gausime iš viso $2k + 1$ dauginamąjį. Kadangi -1 nėra kvadratinė liekana moduliu p, tai tarp dauginamųjų bus tik viena liekana, kuri yra pati sau atvirkštinė (liekana 1). Visos likusios bus atvirkštinės poromis (kvadrato atvirkštinė yra kvadratas), tad sudauginę iš ties gausime 1.

    Kai $p = 4k + 1$, gausime iš viso $2k$ dauginamųjų. Kadangi -1 šiuo atveju jau yra kvadratinė liekana, tai bus dvi liekanos, kurios yra sau atvirkštinės (1 ir -1). Likusios vėl bus atvirkštinės poromis, tad visų sandauga bus lygi -1.

11. Pastebėkime, kad duota sandauga yra visų kvadratinių liekanų moduliu p sandauga. Iš ties - iš viso yra $(p-1)/2$ liekanų, visos jos kvadratinės, ir jokios dvi nesutampa, nes jei $a^2 \equiv b^2 \pmod p$, tai arba $a \equiv b \pmod p$ arba $a \equiv -b \pmod p$. Pastaroji lygybė negali būti teisinga, nes ir a ir b nelyginiai skaičiai tarp 1 ir $p-2$. Lieka pasinaudoti praeitu uždaviniu.

12. Liekana -4 bus bikvadratinė moduliu p, kai lygtis $x^4 + 4 \equiv 0 \pmod p$ turės sprendinį. Pasinaudoję duota lygybe gauname, kad taip bus tada ir tik tada, kai sprendinį turės viena iš lygčių $(x \pm 1)^2 + 1 = 0$, kas yra ekvivalentu -1 buvimui kvadratine liekana moduliu p.

13. Jei pirminis p dalo duotą reiškinį, tai tuomet $x^4 - x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. Perrašykime šią lygybę dviem būdais: $(x^2-1)^2 \equiv -x^2 \pmod p$ ir $(x^2+1)^2 \equiv -3x^2 \pmod p$. Iš pirmosios gausime, kad -1 yra kvadratinė liekana moduliu p, t.y. $p \equiv 1 \pmod 4$, o iš antrosios, kad 3 yra kvadratinė liekana moduliu p, t.y. $p \equiv 1 \pmod 3$.

14. Išskaidę daugianarį dauginamaisiais gauname $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 6)$. Pirminis p nedalins jo, kai ir 2, ir 3, ir 6 bus nekvadratinės liekanos. Tačiau to būti negali, nes dviejų nekvadratinių liekanų sandauga yra kvadratinė liekana.

15. Kadangi q pirminis, tai $q|2^{q-1} - 1$, t.y. $2^{2p} \equiv 1 \pmod q$. Vadinasi, 2^p bus lygus arba 1 arba -1 moduliu q. Parodysime, kad atrasis variantas negalimas. Kandagi $p \equiv 3 \pmod 4$, tai $q \equiv 7 \pmod 8$, bet tuomet 2 yra kvadratinė liekana moduliu q, o -1 nėra, kas prieštarautų $2^p \equiv -1 \pmod q$.

16. a) Tegu q pirminis a daliklis (pagal sąlygą nelyginis). Kadangi $p \equiv b^2 \pmod q$ ir $p \equiv 1 \pmod 4$, tai $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{b^2}{q}\right) = 1$. Kadangi visi pirminiai a dalikliai yra kvadratinės liekanos, tai ir a bus kvadratinė liekana.
    b) Tegu q pirminis $a+b$ daliklis. Užsirašę lygybę $p = a^2 + b^2 = (a+b)(a-b) + 2b^2$ matome, kad $p \equiv 2b^2 \pmod q$, arba $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)$. Jei $a + b$ turi lyginį skaičių pirminių daliklių (skaičiuojant kartotinumus), kurie lygsta ± 3 moduliu 8, tai tuomet $\left(\frac{a+b}{p}\right) = 1$ ir $a+b \equiv \pm 1 \pmod 8$, o jei nelyginį, tai tuomet $\left(\frac{a+b}{p}\right) = -1$ ir $a + b \equiv \pm 3 \pmod 8$.
    c) Duota lygybė seka iš $(a + b)^2 - 2ab = p$.
    d) Pakanka prieš tai gautą lygybę pakelti laipsniu $(p - 1)/4$.

Užrašę lygybę $a^2 \equiv -b^2 \equiv a^2 f^2 \pmod{p}$ ir suprastinę gausime $f^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Sujungę šį pastebėjimą su antra ir ketvirta lygybėmis gausime

$$\begin{aligned} f^{\frac{(a+b)^2-1}{4}} \equiv (-1)^{\frac{(a+b)^2-1}{8}} \equiv (a+b)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (2ab)^{\frac{p-1}{4}} &\equiv (2a^2 f)^{\frac{p-1}{4}} \\ &\equiv 2^{\frac{p-1}{4}} f^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}, \end{aligned}$$

ką suprastinę gausime $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{ab/2} \pmod{p}$. Galiausiai lieka pastebėti, kad $f^{ab/2} \equiv 1 \pmod{p}$ tik tada, kai b dalijasi iš 8, kas ir reiškia, kad p užrašomas kaip $A^2 + 64B^2$.

17. Kai $p = 2$ tai A nėra kvadratas, tad tarkime, kad $p \geqslant 3$. Pagal Ferma teoremą $7p + 3^p - 4 \equiv -1 \pmod{p}$. Jei A kvadratas, tai -1 kvadratinė liekna moduliu p, todėl $p = 4k + 1$. Tačiau tuomet $A \equiv 7 + (-1) - 4 \equiv 2 \pmod{4}$, ko būti negali, nes 2 nėra kvadratinė liekana moduliu 4.

18. Parodysime, kad lygtis visuomet turi sprendinių. Tarkime priešingai, tegu su kažkokiu p lygtis sprendinių neturi, t.y. su visomis x ir y reikšmėmis $x^2 + y^2 \not\equiv 2003 \pmod{p}$, arba $x^2 \not\equiv 2003 - y^2 \pmod{p}$. Kadangi moduliu p lygiai $\frac{p+1}{2}$ pusiau liekanų yra kvadratinės (su nuliu), tai ir kairė ir dešinė lygties pusės įgys po $\frac{p+1}{2}$ skirtingų reikšmių. Kadangi $\frac{p+1}{2} + \frac{p+1}{2} > p$, tai bent dvi jos sutaps - prieštara.

19. Skaičiaus m skaitmenų suma negali būti lygi 1, parodysime, kad negali būti lygi ir dviem. Tarkime priešingai, tuomet egzistuos tokios a ir b reikšmės, su kuriomis $10^a + 10^b$ dalinsis iš 2003, t.y. $10^a \equiv -10^b \pmod{2003}$. Kadangi 10 yra kvadratinė liekana moduliu 2003 ($\left(\frac{10}{2003}\right) = \left(\frac{2}{2003}\right)\left(\frac{5}{2003}\right) = -\left(\frac{3}{5}\right) = 1$), tai gauname, kad ir -1 yra kvadratinė liekana moduliu 2003; prieštara.

    Parodyti, kad $S(m) = 3$, nėra labai paprasta, nes tenka dauginti gana nemažus skaičius, norint įsitikinti, kad 10 laipsniai įgyja pakankamai daug skirtingų liekanų. Konkrečiau, norint parodyti, kad 10 eilė moduliu 2003 yra 1001 reikia parodyti, kad $10^{77}, 10^{91}$ ir 10^{143} nelygsta vienetui. Greičiausia yra rasti laipsnius $10^7, 10^{14}, 10^{28}, 10^{56}, 10^{112}$, tuomet gausime, kad $10^{77} \equiv 10^7 10^{14} 10^{56}$, $10^{91} \equiv 10^{77} 10^{14}$, $10^{143} = 10^{112} 10^{28} 10^3$. Parodžius tai, lieka pastebėti, kad tuomet 10 laipsniais galėsime užrašyti visas kvadratines liekanas, tarp jų ir $1600, 400$ ir 3.

Diofantinės lygtys

Dvi lygties pusės

1. Nagrinėkime lygtį moduliu 3. Gausime $x^2 \equiv 2 \pmod{3}$, o taip būti negali. Vadinasi lygtis sveikųjų sprendinių neturi.

2. Ieškokime tik teigiamų sprendinių, nes radę juos, rasime ir neigiamus. Išskaidykime dauginamaisiais: $(x-y)(x+y) = 100$. Kadangi $x - y$ ir $x + y$ yra vienodo lyginumo, ir jų sandauga lygi 100, tai jie tegali būti lygūs 2 ir 50 arba 10 ir 10. Gauname sprendinius $(26, 24)$ ir $(10, 0)$. Lieka tik pridurti, kad šie sprendiniai tiks ir paimti su visomis įmanomomis ženklų kombinacijomis.

3. Nagrinėdami lygtį moduliu 4 gauname, kad dviejų kvadratų suma turi būti lygi trims. Kadangi kvadratai moduliu 4 įgyja tik liekanas 0 ir 1, tai taip niekada nebus. Lygtis sprendinių neturi.

4. Pastebėkime, kad x turi būti lyginis. Tačiau tuomet kairioji lygties pusė dalinsis iš 4, o dešinioji - ne. Sprendinių nėra.

5. Pastebėkime, kad jei $x > 2$ arba $x < 0$, tai $x^2 > 2x + 2$. Taip pat, jei $y > 3$ arba $y < 0$, tai $y^2 > 3y + 2$. Vadinasi, arba x turi būti lygus $0, 1, 2$, arba y turi būti lygus $0, 1, 2, 3$. Patikrinę randame sprendinius $(0, -1)$, $(0, 4)$, $(2, -1)$ ir $(2, 4)$.

6. Išskaidykime dauginamaisiais: $(x - y)(x - z^2) = 1987$. Iš čia nesunku rasti didelį sprendinį, pvz $(100^2 + 1, 100^2 - 1986, 100)$.

7. 3^y moduliu 8 lygsta tik 3 arba 1, tad lygtis neturės sprendinių su $x \geqslant 3$. Patikrinę mažesnes reikšmes randame sprendinius $(2, 1)$ ir $(1, 0)$.

8. Pastebėkime, kad jei $x > 1$, tai y turi būti lyginis, o tuomet, pažymėję $y = 2z$, galime išskaidyti lygties dešiniąją pusę : $2^x = (3^z - 1)(3^z + 1)$. Vienas iš dauginamųjų nesidalins iš 4 todėl turės būti lygus dviems. Gauname sprendinius $(3, 2)$ ir (iš atvejo $x = 1$) $(1, 1)$.

9. Kairioji pusė bus didesnė už dešiniąją, jei tik y bus didesnis už 9, todėl užtenka patikrinti devynias reikšmes. Tai padaryti paprasta persirašius lygtį kaip kvadratinę $(x^2 + x(2y - 18) + y^2 - 81)$ ir suskaičiavus diskriminantą - $4 \cdot 9 \cdot (18 - 2y)$. Tiks reikšmės $y = 1$, $y = 7$ ir $y = 9$ (pastaroji netinka, nes x turėtų būti 0). Gausime sprendinius $(20, 1)$ ir $(8, 7)$.

10. Kairioji lygybės pusė yra kvadratas, o dešinioji, jei $z > 1$, duoda liekaną 3 moduliu 4. Vadinasi z gali būti lygus tik vienam, iš kur randame sprendinius $(1, y, 1)$, $y \in \mathbb{N}$.

11. Išskaidykime dauginamaisiais: $(y^2 - 3)(2x^2 + 1) = 9$. Dauginamasis $2x^2 + 1$ dalo 9 tik kai $x = 0$, $x = \pm 1$ arba $x = \pm 2$. Tinka tik pastarasis, randame sprendinį $(\pm 2, \pm 2)$.

12. Išskaidę dauginamaisiais $1989 = 13 \cdot 17 \cdot 9$ matome, kad x turi dalintis iš 17, o y iš 13. Pakeitę $x = 17a$, $y = 13b$ gauname lygtį $17a^2 + 13b^2 = 17 \cdot 13 \cdot 9^2$, iš kurios vėl gauname, kad $a = 13k$, $b = 17l$. Įstatę ir suprastinę gauname $13k^2 + 17l^2 = 81$. Pastaroji labai paprasta, randame, kad $k = 1$, $l = 2$, vadinasi pradinės lygties sprendinys bus $(17 \cdot 13, 2 \cdot 17 \cdot 13)$.

13. Naudosime įterpimo tarp kvadratų (šiuo atveju ketvirtųjų laipsnių) triuką. Kai x teigiamas, tai $x^4 < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 < (x + 1)^4$,o kai x neigiamas, tai $(x + 1)^4 < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \leqslant x^4$ (lygybė įgyjama tik kai $x = -1$). Vadinasi lieka patikrinti dvi reikšmes $x = 0$, $x = -1$, iš kurių gauname sprendinius $(-1, \pm 1)$ ir $(0, \pm 1)$.

14. Dešinė lygties pusė beveik visuomet didesnė už kairiąją. Tą paprasta išnaudoti persirašius lygtį kaip kvadratinę $(5a^2 + a(5b - 7) + 5b^2 - 14b)$ ir suskaičiauvus

diskriminantą: $-15(5b^2-14b)+49$. Jis nebus neigiamas tik kai b tenkins $0 \leqslant b \leqslant 3$, patikrinę šias reikšmes gauname du sprendinius - $(0,0)$ ir $(-1,3)$.

15. Kadangi kairioji pusė sveikas skaičius, tai x turi būti nemažesnis už y. Jei jie lygus, tai tinka tik $(1,1)$, tad tarkime, kad $x > y$. Tuomet gausime, kad $x-y$ turi būti didesnis už y, ir kad $y|x$. Pažymėję $x = ky$ gauname $(ky)^y = y^{(k-1)y}$, arba $k = y^{k-2}$. Ši lygtis turi tik du sprendinius $k = 3, y = 3$ ir $k = 4, y = 2$, nes jei $k > 4$ tai $k < 2^{k-2} \leqslant y^{k-2}$. Pakeitę atgal, gauname pradinės lygties sprendinius $(6,3)$ ir $(8,2)$.

16. Uždavinys ekvivalentus tokiam - išskaidykite $6!$ į paeiliui einančių skaičių sandaugą. Daugiausia jį galima išskaidyti į 6 dauginamuosius, tuomet gausime sprendinį $(1,6)$. Į penkis ir keturis dauginamuosius išskaidyti nepavyks, nes jei visi bus mažesni už 6, tai sandauga bus per maža, o jei didesni, tai turės arba dalintis iš 7 (arba 11, arba 13) arba sandauga jau bus per didelė. Į tris dauginamuosius išskaidyti galima - $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$, į du ne $(26 \cdot 27 < 720 < 27 \cdot 28)$, į vieną, aišku, galima. Randame dar du sprendinius: $(7,10)$ ir $(6!-1, 6!)$

17. Sukelkime viską į vieną lygties pusę : $x^2 - 3x + y^2 - 3y + z^2 - 3z + t^2 - 3t = 0$. Mažiausios reikšmės kurias gali įgyti reiškinys $x^2 - 3x$ yra $4, 0, -2$, o visos likusios ne mažesnės už dešimt. Susumavę gausime nulį tik arba atveju $0+0+0+0$ arba $0-2-2+4$, tad sprendiniai bus $(0,0,0,0)$ ir visos įmanomos kombinacijos iš 0, 1 arba 2, 1 arba 2, -1 arba 4 (pvz. $(0,1,1,-1)$, $(4,2,0,1)$, ...).

18. Parodysime, kad kairioji lygties pusė yra beveik visuomet didesnė už dešiniąją. Kadangi $x > y$, tai $xy + 61 < x^2 + 61$. Iš kitos pusės, $x^3 - y^3 \geqslant x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$, kas yra daugiau už $x^2 + 61$, kai $x > 6$. Vadinasi, lieka patikrinti tik keletą reikšmių, ką padarę randame vienintėlį sprendinį $(6,5)$.

19. Jei $b = 0$, tai lygtis užrašoma kaip $2^a = (c-3)(c+3)$. Vienintėliai dvejeto laipsniai besiskiriantys per 6 yra 2 ir 8, randame sprendinį $(4,0,5)$. Tegu $b > 0$, tuomet c dalijasi iš trijų ir $b \geqslant 2$. Pažymėję $b-2 = d$, $c = 3n$ gauname $2^a 3^d = (n-1)(n+1)$. Kadangi $\operatorname{dbd}(n-1, n+1) \leqslant 2$, tai vienas iš dauginamųjų nesidalija iš 3. Tada jis arba yra lygus 1, arba dalijasi iš 2. Jei lygus vienetui, tai tuomet $n = 2$, randame sprendinį $(0,3,6)$. Jei dalijasi iš dviejų, tai tuomet n nelyginis ir $a \geqslant 2$. Pažymėję $n = 2k-1$ ir $a - 2 = e$ gauname $2^e 3^d = k(k+1)$. Kadangi k ir $k+1$ tarpusavyje pirminiai, tai arba $k = 2^e$, $k+1 = 3^d$ arba $k = 3^d$, $k+1 = 2^e$. Pirmu atveju gauname lygtį $3^d = 2^e + 1$, antru $2^e = 3^d + 1$.

20. $3^x \equiv (-1)^x \pmod 4$, todėl, jei $y > 1$ ($y = 1$ tinka, tuomet $x = 1$), tai x turi būti lyginis. Pažymėję $x = 2a$ gauname lygtį $2^y = (3^a - 1)(3^a + 1)$. Abu dauginamieji esantys dešinėje pusėje turi būti dvejeto laipsniai, bet besiskiriantys per du yra tik 2 ir 4. Vadinasi $a = 1$, $x = 2$, $y = 3$.

21. Išskaidykime $x^3 = 4(y-1)(3y^2 + 3y - 1)$. Kadangi su visomis y reikšmėmis $3y^2 + 3y - 1 \equiv 2 \pmod 3$, tai jis turės pirminį daliklį duodantį liekaną 2 moduliu 3. Tačiau kairioji lygties pusė tokio daliklio turėti negali, nes -3 negali būti kvadratinė liekana moduliu pirminio $p \equiv 2 \pmod 3$. Vadinasi, $3y^2 + 3y - 1$ turi

būti lygus -1, todėl $y = 0$ arba $y = -1$. Tinka tik pirmasis, randame sprendinį $(\pm 1, 0)$.

Algebra

Nelygybės

Pirmieji žingsniai

1. Iš $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geqslant (xy)(2xy - xy) = xy(x+y)$. $\wedge$

2. Nelygybė ekvivalenti $\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2 \geqslant 0$, kas yra akivaizdu. $\wedge$

3. Nelygybė ekvivalenti $\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - d\right)^2 \geqslant 0$, kas yra akivaizdu. Lygybė galios, kai $a = b = c = d = 0$. $\wedge$

4. Nelygybė ekvivalenti $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \geqslant 0$. Iš uždavinio nr. 2 rezultato seka, kad ji yra teisinga. $\wedge$

5. Padauginame nelygybę iš $ab(a+b)$. Gausime $a^2xy + a^2y^2 + b^2yx + b^2x^2 \geqslant a^2xy + b^2xy + 2abxy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geqslant 0$, kas yra akivaizdu. Lygybė galios, kai $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. Pagal matematinės indukcijos principą, nelygybę galime praplėsti: $\wedge$

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} &\geqslant \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n}\\ &\geqslant \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \ldots\\ &\geqslant \frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}.\end{aligned}$$

Lygybė galios, kai $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

6. Nelygybę keliame kvadratu ir dauginame iš $x^2y^2(x^2+y^2)$. Gausime $y^4 + x^2y^2 + 2xy(x^2+y^2) + x^4 + x^2y^2 \geqslant 8x^2y^2$. Pastebėkime, kad sudėję akivaizdžias nelygybes $x^4 + y^4 \geqslant 2x^2y^2$ ir $2xy(x^2+y^2) \geqslant 4x^2y^2$, gausime tai, ką reikėjo įrodyti. $\wedge$

7. Nelygybė ekvivalenti $10a^2 + 10b^2 + c^2 \geqslant 4ab + 4ac + 4bc$. Belieka tik pasukti galvą, kaip sukonstruoti nelygybę iš akivaizdžių kitų: $\wedge$

$$\begin{aligned}&8a^2 + \frac{1}{2}c^2 \geqslant 4ac;\\ &8b^2 + \frac{1}{2}c^2 \geqslant 4bc;\\ &2a^2 + 2b^2 \geqslant 4ab.\end{aligned}$$

8. Naudosime uždavinio nr. 2 rezultatą: $S \geqslant a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Minimumas $S = 1$ pasiekiamas, kai $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\wedge$

9. $\Omega = (2a-1)^2 + (a+c)^2 + (2c+1)^2 + 6b^2 - 2 \geqslant -2$. Minimumas yra -2, pasiekiamas, kai $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -\frac{1}{2}$. $\wedge$

10. Naudojame $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$: $\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$. Pastebėkime, kad $(1-x^2)(1-y^2) = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 \leqslant 1 - 2xy + x^2y^2 = (1-xy)^2$. Tai ir užbaigia įrodymą. $\wedge$

11. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c \Leftrightarrow \frac{3(ab+bc+ac)}{a+b+c} \geqslant 3abc$. Tuomet, belieka įrodyti $a + b + c \geqslant \frac{3(ab+bc+ac)}{a+b+c} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$, o remiantis užd. nr. 2, tai yra įrodyta. $\wedge$

12. Tegu $E = (x+y-a)^2 + (x+z-b)^2 + (y+z-c)^2 + (x-d)^2 + (y-e)^2 + (z-f)^2 + 2(x+y+z-k)^2 + C \geqslant C$. Kvadratus parinkome tokius, kad viską sudauginus koeficientai prie kvadratų ir narių xy, xz, yz atitiktų originalią E išraišką, nepriklausomai nuo a, b, c, d, e, f, k. Tuomet $\wedge$

$$\begin{cases} -2xa - 2xb - 2xd - 4xk = -52x, \\ -2ya - 2yc - 2ye - 4yk = -60y, \\ -2zb - 2zc - 2zf - 4zk = -64z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + d + 2k = 26, \\ a + c + e + 2k = 30, \\ b + c + f + 2k = 32, \end{cases} \quad (1)$$

Kad E minimumas būtų C, visi kvadratai turi būti lygūs 0:

$$\begin{cases} x + y - a = 0, \\ x + z - b = 0, \\ y + z - c = 0, \\ x - d = 0, \\ y - e = 0, \\ z - f = 0, \\ x + y + z - k = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + e = a, \\ d + f = b, \\ e + f = c, \\ d + e + f = k, \end{cases} \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) sudarę bendrą sistemą ir ją išsprendę gausime $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 4$, $k = 8$, o $a^2 + b^2 + c^+ d^2 + e^2 + f^2 + k^2 = 244$. Taigi, $E = (x+y-4)^2 + (x+z-5)^2 + (y+z-7)^2 + (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 + 2(x+y+z-8)^2 - 244 + \Psi \geqslant \Psi - 244$. Vadinasi, E minimumas yra $\Psi - 244$, o jis pasiekiamas, kai $x = 1$, $y = 3$, $z = 4$.

13. $\wedge$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a}{3} \geqslant 0. \qquad \text{Naudojame uždavinio nr.1 rezultatą:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a}{3} &= \sum_{cyc} \frac{3a^3 - a^3 - a^2b - ab^2}{3(a^2 + ab + b^2)} \\ &\geqslant \sum_{cyc} \frac{2a^3 - a^3 - b^3}{3(a^2 + ab + b^2)} \\ &= \sum_{cyc} \frac{a-b}{3} = 0. \end{aligned}$$

14. Naudojame uždavinio nr. 1 rezultatą: ∧

$$\begin{aligned}\text{KAIRĖ PUSĖ} &\leqslant \frac{1}{ab(a+b)+abc}+\frac{1}{bc(b+c)+abc}+\frac{1}{ac(a+c)+abc}\\ &= \frac{c}{abc(a+b+c)}+\frac{a}{abc(a+b+c)}+\frac{b}{abc(a+b+c)}\\ &= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}\\ &= \frac{1}{abc}.\end{aligned}$$

15. *Lema.* Jei x, y - teigiami realieji, tai $x^5 + y^5 \geqslant x^2y^2(x + y)$. ∧
Lemos įrodymas.

$$\begin{aligned}x^5+y^5 &= (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)\\ &= (x+y)((x-y)^2(x^2+xy+y^2)+x^2y^2)\\ &\geqslant x^2y^2(x+y).\end{aligned}$$

Naudodami sąlygą $abc = 1$, nelygybę pertvarkome:

$$\begin{aligned}\text{KAIRĖ PUSĖ} &= \sum_{cyc}\frac{a^2b^2c}{a^5+b^5+a^2b^2c}\\ &\leqslant \sum_{cyc}\frac{a^2b^2c}{a^2b^2(a+b)+a^2b^2c}\\ &= \sum_{cyc}\frac{c}{a+b+c}\\ &= 1.\end{aligned}$$

16. *Lema 1.* $b^3c + bc^3 \leqslant b^4 + c^4$. ∧
Lemos 1 įrodymas. $\Leftrightarrow b^3(b - c) + c^3(c - b) \geqslant 0 \Leftrightarrow (b - c)^2(b^2 + bc + c^2) \geqslant 0$. Jei $bc \geqslant 0$, nelygybė akivaizdi, o jei $bc < 0$, tenka įrodinėti $b^2 + bc + c^2 \geqslant 0$: nelygybė ekvivalenti $(b + c)^2 \geqslant bc$, kas yra akivaizdu. □
Lema 2. $a^2bc \leqslant \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{2}a^2c^2$.
Lemos 2 įrodymas. $\Leftrightarrow (ab - ac)^2 \geqslant 0$, kas yra akivaizdu. □
Naudodami sąlygą $abc \geqslant 1$, nelygybę pertvarkome:

$$\begin{aligned}\text{KAIRĖ PUSĖ} &\geqslant \sum_{cyc}\frac{a^5-a^2\cdot abc}{a^5+abc(b^2+c^2)} = \sum_{cyc}\frac{a^4-a^2bc}{a^4+b^3c+bc^3}\\ &\geqslant \sum_{cyc}\frac{a^4-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{2}a^2c^2}{a^4+b^3c+bc^3} && \text{(Lema 2)}\\ &\geqslant \frac{a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^4-b^2c^2+c^4}{a^4+b^4+c^4} && \text{(Lema 1)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{a^4+b^4+c^4}\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

17. Pastebime, kad galioja tapatybė: ∧

$$(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-2ab+bc-c^2+ca)^2\geqslant 0.$$

Vidurkių nelygybės

1. Naudosime AM-GM nelygybę: ∧

$$S=ab+\frac{1}{16ab}+\frac{15}{16ab}\geqslant 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{16ab}}+\frac{15}{16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{15}{16\cdot\frac{1}{4}}=4\frac{1}{4}.$$

Minimumas yra $4\frac{1}{4}$, pasiekiamas, kai $a=b=\frac{1}{2}$.

2. Naudosime AM-GM nelygybę: ∧

$$\begin{aligned}
S &= a+\frac{1}{4a}+b+\frac{1}{4b}+c+\frac{1}{4c}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
&\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{4a}}+2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4b}}+2\sqrt{c\cdot\frac{1}{4c}}+\frac{3}{4}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\\
&\geqslant 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\\
&\geqslant 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=7\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

S minimumas yra $7\frac{1}{2}$, ir jis pasiekiamas, kai $a=b=c=\frac{1}{2}$.

3. Naudosime AM-GM nelygybę: ∧

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt[3]{(a+b)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}\\
&\leqslant \sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\cdot\frac{a+b+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}\\
&= \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\cdot\frac{2(a+b+c)+4}{3}\\
&= \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\cdot\frac{6}{3}=\sqrt[3]{18}.
\end{aligned}$$

Maksimumas yra $\sqrt[3]{18}$, o jis pasiekiamas, kai $a=b=c=\frac{1}{3}$.

4. Galėsime naudoti AM-GM nelygybę, nes $a-2\geqslant 0; b-6\geqslant 0; c-12\geqslant 0$: ∧

$$+\begin{cases}
bc\sqrt{a-2}=\frac{bc}{\sqrt{2}}\sqrt{(a-2)\cdot 2}\leqslant\frac{bc}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(a-2)+2}{2}=\frac{abc}{2\sqrt{2}},\\
ca\sqrt[3]{b-6}=\frac{ca}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{(b-6)\cdot 3\cdot 3}\leqslant\frac{ca}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{(b-6)+3+3}{3}=\frac{abc}{2\sqrt[3]{9}},\\
ab\sqrt[4]{c-12}=\frac{ab}{\sqrt[4]{64}}\sqrt[4]{(c-12)\cdot 4\cdot 4\cdot 4}\leqslant\frac{ab}{\sqrt[4]{64}}\cdot\frac{(c-12)+4+4+4}{4}=\frac{abc}{8\sqrt{2}},
\end{cases}$$

$\Rightarrow \Gamma\leqslant\frac{1}{abc}\cdot\left(\frac{abc}{2\sqrt{2}}+\frac{abc}{2\sqrt[3]{9}}+\frac{abc}{8\sqrt{2}}\right)=\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt[3]{9}}$.
Γ įgauna maksimalią reikšmę, kai $a=4$, $b=9$, $c=16$. Ji lygi $\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt[3]{9}}$.

5. Taikydami AM-GM nelygybę prarandame jos lygybės atvejį, tačiau jis mums ir nereikalingas. $\wedge$

$$\text{Turime } \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{k-1}} < \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k} + (k-1)\right) = 1 + \frac{1}{k^2}.$$

Tuomet $I < n - 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < n - 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = n - 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = n - 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < n.$

6. Pagal AM-GM: $\wedge$

$$+\begin{cases} 7 \cdot \frac{a^3}{b^2} + 2 \cdot \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant 10 \sqrt[10]{\frac{a^{21}b^4c^2}{ab^{14}c^2}} = 10\frac{a^2}{b}, \\ 7 \cdot \frac{b^3}{c^2} + 2 \cdot \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geqslant 10 \sqrt[10]{\frac{b^{21}c^4a^2}{bc^{14}a^2}} = 10\frac{b^2}{c}, \\ 7 \cdot \frac{c^3}{a^2} + 2 \cdot \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} \geqslant 10 \sqrt[10]{\frac{c^{21}a^4b^2}{ca^{14}b^2}} = 10\frac{c^2}{a}, \end{cases}$$

Sudedame ir gauname tai, ką reikėjo įrodyti.

Pastaba. Šį uždavinį galima daug paprasčiau įrodyti, naudojant nesunkiai įrodomą lemą: Su realiaisiais teigiamais a, b, c galioja $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c$.

7. Pagal AM-GM nelygybę, galioja šios nelygybės: $\wedge$

$$+\begin{cases} \frac{b+c}{\sqrt{a}} + 2\sqrt{a} = \frac{b}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} \geqslant 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c}, \\ \frac{c+a}{\sqrt{b}} + 2\sqrt{b} = \frac{c}{\sqrt{b}} + \sqrt{b} + \frac{a}{\sqrt{b}} + \sqrt{b} \geqslant 2\sqrt{c} + 2\sqrt{a}, \\ \frac{a+b}{\sqrt{c}} + 2\sqrt{c} = \frac{a}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \geqslant 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}, \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} = 3. \end{cases}$$

Viską sudėję gausime norimą rezultatą.

8. Pagal AM-GM: $\wedge$

$$+\begin{cases} \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^3}{b^3} + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^6}} = 3 \cdot \frac{a^2}{b^2}, \\ \frac{b^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3} + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^6}{c^6}} = 3 \cdot \frac{b^2}{c^2}, \\ \frac{c^3}{a^3} + \frac{c^3}{a^3} + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^6}{a^6}} = 3 \cdot \frac{c^2}{a^2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}\right) + 3 \ &\geqslant\ 2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \\ &\geqslant\ 2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}} \\ &=\ 2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + 3. \end{aligned}$$

9. Pagal AM-GM: $\wedge$

$$+\begin{cases} 3\cdot\frac{a^2}{b^5}+2\cdot\frac{1}{a^3}\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{a^6}{b^{15}a^6}}=5\cdot\frac{1}{b^3},\\ 3\cdot\frac{b^2}{c^5}+2\cdot\frac{1}{b^3}\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{b^6}{c^{15}b^6}}=5\cdot\frac{1}{c^3},\\ 3\cdot\frac{c^2}{a^5}+2\cdot\frac{1}{c^3}\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{c^6}{a^{15}c^6}}=5\cdot\frac{1}{a^3}.\end{cases}$$

Sudėję gausime tai, ką reikėjo įrodyti.

10. Naudosime AM-GM nelygybę: $\wedge$

$$\begin{aligned}\text{KAIRĖ PUSĖ} &= (a+b+a+c)(a+b+b+c)(a+c+b+c)\\ &\geqslant 2\sqrt{(a+b)(a+c)}\cdot 2\sqrt{(a+b)(b+c)}\cdot 2\sqrt{(a+c)(b+c)}\\ &= 8(a+b)(a+c)(b+c)\\ &= 8(1-a)(1-b)(1-c).\end{aligned}$$

11. Duota nelygybė ekvivalenti $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$. Pagal AM-GM nelygybę: $\wedge$

$$+\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}},\\ \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}},\\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}},\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}. \tag{1}$$

Taip pat:

$$+\begin{cases}\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}},\\ \frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}},\\ \frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}},\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}. \tag{2}$$

Sudėję (1) ir (2) gausime tai, ką reikėjo įrodyti.

12. Pagal AM-GM: $\wedge$

$$\begin{cases}1+\frac{2a}{3b}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{a}{3b}+\frac{a}{3b}\geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{a}{3b}\right)^2}=\frac{5}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{5}},\\ 1+\frac{2b}{3c}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{b}{3c}+\frac{b}{3c}\geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{b}{3c}\right)^2}=\frac{5}{3}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{5}},\\ 1+\frac{2c}{3d}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{c}{3d}+\frac{c}{3d}\geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{c}{3d}\right)^2}=\frac{5}{3}\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{5}},\\ 1+\frac{2d}{3a}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{d}{3a}+\frac{d}{3a}\geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{d}{3a}\right)^2}=\frac{5}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}},\end{cases}$$

$\Rightarrow S=\left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right)\geqslant\frac{625}{81}\cdot\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{625}{81}$. S Minimumas yra $\frac{625}{81}$. Jis pasiekiamas, kai $a=b=c=d>0$.

13. Naudodami sąlygą, verčiame nelygybę homogenine: $\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$. Pagal AM-GM: $\wedge$

$$+\begin{cases} \frac{9a^3}{b(2c+a)} + 3b + (2c+a) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{9a^3}{b(2c+a)} \cdot 3b(2c+a)} = 9a, \\ \frac{9b^3}{c(2a+b)} + 3c + (2a+b) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{9b^3}{b(2a+b)} \cdot 3c(2a+b)} = 9b, \\ \frac{9c^3}{a(2b+c)} + 3a + (2b+c) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{9c^3}{b(2b+c)} \cdot 3a(2b+c)} = 9c, \end{cases}$$

Sudėję ir sutvarkę nelygybę ir gausime tai, ką reikėjo įrodyti.

14. Nelygybę galime paversti homogenine, naudodami duotą sąlygą: $\wedge$

$$\frac{c(a+b)+ab}{a(a+b)} + \frac{a(b+c)+bc}{b(b+c)} + \frac{b(c+a)+ca}{c(c+a)} \geqslant \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \geqslant \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{b} + \frac{b+c}{c} + \frac{c+a}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \geqslant \frac{15}{2} \qquad (1)$$

Naudosime AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned} \text{KAIRĖ PUSĖ}(1) &= \frac{a+b}{4b} + \frac{b+c}{4c} + \frac{c+a}{4a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \\ &\quad + \frac{3}{4}\left(\frac{a+b}{b} + \frac{b+c}{c} + \frac{c+a}{a}\right) \\ &\geqslant 6\sqrt[6]{\frac{a+b}{4b} \cdot \frac{b+c}{4c} \cdot \frac{c+a}{4a} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{b+c} \cdot \frac{a}{c+a}} \\ &\quad + \frac{3}{4}\left(3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 3\right) \\ &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

15. Pagal AM-GM nelygybę: $\wedge$

$$3 = ab + bc + ac \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leqslant 1.$$

Pagal duotą sąlygą ir turimą rezultatą:

$$\begin{aligned} \text{KAIRĖ PUSĖ} &= \sum_{cyc} \frac{1}{1 + a(3 - bc)} = \sum_{cyc} \frac{1}{1 + 3a - abc} \\ &\leqslant \sum_{cyc} \frac{1}{3a} = \frac{ab + ac + bc}{3abc} = \frac{1}{abc}. \end{aligned}$$

16. Nelygybę keliame kvadratu ir sutvarkome: $\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. Pagal AM-GM: $\wedge$

$$+\begin{cases} \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2}} = 2b^2, \\ \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2a^2}{b^2}} = 2c^2, \\ \frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{c^2a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2b^2}{c^2}} = 2a^2, \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$

17. Pagal AM-GM nelygybę: $\wedge$

$$(x+y)(x+z) = xy + (x^2 + zy) + xz \geqslant xy + 2x\sqrt{yz} + xz = (\sqrt{xy} + \sqrt{xz})^2.$$

Taigi,

$$\sum_{cyc} \frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} \leqslant \sum_{cyc} \frac{x}{x + \sqrt{xy} + \sqrt{xz}} = \sum_{cyc} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = 1.$$

18. Padauginę iš 2 ir prie abiejų nelygybės pusių pridėję $x^2 + y^2 + z^2$, gausime $\wedge$

$$x^2 + 2\sqrt{x} + y^2 + 2\sqrt{y} + z^2 + 2\sqrt{z} \geqslant 3.$$

Iš AM-GM nelygybės:

$$\sum_{cyc} x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geqslant \sum_{cyc} 3\sqrt[3]{x^3} = 9.$$

Tą ir reikėjo įrodyti.

19. Pagal AM-GM: $\wedge$

$$+\begin{cases} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{1+b}{8} \cdot \frac{1+c}{8}} = \frac{3a}{4}, \\ \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{(1+c)(1+a)} \cdot \frac{1+c}{8} \cdot \frac{1+a}{8}} = \frac{3b}{4}, \\ \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \cdot \frac{1+a}{8} \cdot \frac{1+b}{8}} = \frac{3c}{4}, \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geqslant \frac{a+b+c}{2} - \frac{3}{4} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$

20. Naudodami AM-GM nelygybę gauname: $\wedge$
$\left(\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + 4\right) + \left(\frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} + 4\right) + \left(\frac{c^6}{a^3} + \frac{a^6}{b^3} + 4\right) \geqslant 6\left(\sqrt[6]{\frac{a^6b^3}{c^3}} + \sqrt[6]{\frac{b^6c^3}{a^3}} + \sqrt[6]{\frac{c^6a^3}{b^3}}\right) = 18$
$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3}\right) + 12 \geqslant 18 \Leftrightarrow \frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \geqslant 3.$

21. Pastebėkime, kad $\wedge$
$(a-b+c-d)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 \geqslant 4(ab+bc+cd+da) = 4 \Leftrightarrow a+b+c+d \geqslant 2.$
Pagal AM-GM:

$$+\begin{cases} \frac{36a^3}{b+c+d} + 2(b+c+d) + 6a + 3 \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{36a^3}{b+c+d} \cdot 2(b+c+d) \cdot 6a \cdot 3} = 24a, \\ \frac{36b^3}{c+d+a} + 2(c+d+a) + 6b + 3 \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{36b^3}{c+d+a} \cdot 2(c+d+a) \cdot 6b \cdot 3} = 24b, \\ \frac{36c^3}{d+a+b} + 2(d+a+b) + 6c + 3 \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{36c^3}{d+a+b} \cdot 2(d+a+b) \cdot 6c \cdot 3} = 24c, \\ \frac{36d^3}{a+b+c} + 2(a+b+c) + 6d + 3 \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{36d^3}{a+b+c} \cdot 2(a+b+c) \cdot 6d \cdot 3} = 24d, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{KAIRĖ PUSĖ} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3} \geqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

22. Pagal AM-GM: ∧

$$+\begin{cases} \frac{bc}{a^2} = \sqrt[3]{\frac{b^7}{a^2c^2}\cdot\frac{c^7}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{b^7}{a^2c^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\right), \\ \frac{ca}{b^2} = \sqrt[3]{\frac{c^7}{b^2a^2}\cdot\frac{a^7}{b^2c^2}\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{c^7}{b^2a^2}+\frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\right), \\ \frac{ab}{c^2} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{c^2b^2}\cdot\frac{b^7}{c^2a^2}\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{a^7}{c^2b^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\right), \\ abc = \sqrt[3]{\frac{b^7}{a^2c^2}\cdot\frac{c^7}{a^2b^2}\cdot\frac{a^7}{b^2c^2}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{b^7}{a^2c^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{a^7}{b^2c^2}\right), \end{cases}$$

Sudėję gausime tai, ką reikėjo įrodyti.

Cauchy-Schwarz nelygybė

1. Pažymime $a_1 = \alpha$, $a_2+a_3 = \beta$, $a_4+a_5+a_6 = \gamma$ ir $a_7+a_8+a_9+a_{10} = \delta$. Tuomet ∧ $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$ ir $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta$. Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę: $Z = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 \geqslant \alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\gamma^2}{3} + \frac{\delta^2}{4} \Leftrightarrow 12Z \geqslant 12\alpha^2 + 6\beta^2 + 4\gamma^2 + 3\delta^2$. Pastebime, kad $\alpha \geqslant \frac{1}{4}$, $\alpha+\beta \geqslant \frac{1}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma \geqslant \frac{3}{4}$, be to $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$. Teisingai padauginę ir sudėję gausime $12\alpha+6\beta+4\gamma+3\delta \geqslant \frac{25}{4}$. Na o pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:
$$12Z \geqslant \frac{(12\alpha+6\beta+4\gamma+3\delta)^2}{25} \geqslant \frac{25^2}{4^2\cdot 25} = \frac{25}{16}.$$
Taigi Z minimumas yra $\frac{25}{192}$, o jis pasiekiamas, kai $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = a_5 = a_6 = \frac{1}{12}$ ir $a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = \frac{1}{16}$.

2. Pažymėkime $Ž = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$. Pagal Cauchy-Schwarz nelygybės Engel ∧ formą:
$$\frac{Ž^2}{10} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}{10} \leqslant a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4}$$
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 12\cdot\frac{Ž^2}{10} &\leqslant 12a+6b+4c+3d \\ &= 3(a+b+c+d)+(a+b+c)+2(a+b)+6a \\ &\leqslant 3\cdot 30+14+2\cdot 5+6\cdot 1 = 120 \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow Ž \leqslant 10.$$

3. Nelygybę transformuojame naudodami duotą sąlygą ir tada sprendžiame naudodami Cauchy-Schwarz nelygybę: ∧
$$\begin{aligned} \text{KAIRĖ PUSĖ} &= \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{a^2c^2}{b(a+c)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)} \\ &\geqslant \frac{(ab+bc+ac)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{ab+bc+ac}{2} \\ &\geqslant \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{3} && \text{(AM-GM)} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4. Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę: $\wedge$

$$\begin{aligned}\text{KAIRĖ PUSĖ} &= \sum_{cyc} \sqrt{x_n\,(3x_1+x_2)} \\ &\leqslant \sqrt{\left(\sum_{cyc} x_n\right)\left(\sum_{cyc} 3x_1+x_2\right)} \\ &= \sqrt{4\left(\sum_{cyc} x_n\right)^2} = 2(x_1+x_2+\ldots+x_n).\end{aligned}$$

5. Pertvarkę taikome Cauchy-Schwarz nelygybę: $\wedge$

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \geqslant \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)^2 \geqslant \frac{9}{4}.$$

Paskutinė nelygybė remiasi Nesbitt'o nelygybe, o tai ir užbaigia įrodymą.

6. Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę: $\wedge$

$$\begin{aligned}\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} &\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{x(ay+bz)+y(az+bx)+z(ax+by)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{(xy+yz+xz)(a+b)} \\ &\geqslant \frac{3}{a+b}.\end{aligned}$$

Paskutinė nelygybė teisinga pagal

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+xz).$$

7. Nelygybę pertvarkome, tada taikome Cauchy-Schwarz nelygybę, tada vėl pertvarkome: $\wedge$

$$\text{KAIRĖ PUSĖ} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+ab^2c} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+abc(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{abc+1}.$$

Belieka įrodyti

$$2(a+b+c) \geqslant 3abc+3,$$

kas pagal duotą sąlygą yra ekvivalentu

$$(a+b+c)^3 \geqslant 27abc,$$

kas seka iš AM-GM nelygybės.

8. Įrodymas remiasi matematine indukcija. Akivaizdu, kad jei nelygybė teisinga su $n=k$, tai teisinga ir su $n=k+1$. Taigi, belieka įrodyti kai $n=2$: $\wedge$

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}.$$

Atskliaudus ir sutvarkius:

$$\Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2,$$

kas yra tiesiog Cauchy-Schwarz nelygybė. Šią nelygybę taip pat galima įrodyti naudojantis Pitagoro teoremą, čia įrodymo nepateiksime, bet galite pabandyti jį patys atrasti.

9. *Lemma.* $3(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$. ∧
Lemos įrodymas. Naudojame AM-GM nelygybę: $3(a^3 + b^3 + c^3) = \sum\limits_{cyc} a^3 + \sum\limits_{sym} \frac{a^3+a^3+b^3}{3} \geqslant \sum\limits_{cyc} a^3 + \sum\limits_{sym} \frac{3a^2b}{3} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$. $\square$
Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę ir lemą:

$$\begin{aligned}
(\text{DEŠINĖ PUSĖ})^2 &\leqslant (a^2 + b^2 + c^2)((b + c) + (a + c) + (a + b)) \\
&= 2(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \\
&\leqslant 6(a^3 + b^3 + c^3) = 6(\text{KAIRĖ PUSĖ}).
\end{aligned}$$

Kita vertus, pagal AM-GM:

$$\begin{aligned}
\text{DEŠINĖ PUSĖ} &\geqslant 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(b + c)(a + c)(a + b)}} \\
&\geqslant 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}} \\
&= 3\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8 \cdot 2}} = 6.
\end{aligned}$$

Gauname, kad:
6(DEŠINĖ PUSĖ) $\leqslant$ (DEŠINĖ PUSĖ)^2 $\leqslant$ 6(KAIRĖ PUSĖ) $\Rightarrow$
KAIRĖ PUSĖ $\geqslant$ DEŠINĖ PUSĖ, ką ir reikėjo įrodyti.

10. Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę: ∧

$$(x + y)(z + x) \geqslant (\sqrt{xy} + \sqrt{xz})^2.$$

Taip sumažinę visų trupmenų vardiklius gausime:

$$\sum_{cyc} \frac{x}{x + \sqrt{(x + y)(x + z)}} \leqslant \sum_{cyc} \frac{x}{x + \sqrt{xy} + \sqrt{xz}} = \sum_{cyc} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = 1.$$

11. Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę: ∧
KAIRĖ PUSĖ $= \sum\limits_{cyc} \frac{a^2}{ab+ac} \geqslant \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+df+ef+ea+fa+fb}$.
Pavadinkime gautą vardiklį V. Tada:

$$2V = (a + b + c + d + e + f)^2 - (a + d)^2 - (b + e)^2 - (c + f)^2.$$

Tačiau vėl iš Cauchy-Schwarz nelygybės:

$$(1 + 1 + 1)\left((a + d)^2 + (b + e)^2 + (c + f)^2\right) \geqslant (a + b + c + d + e + f)^2.$$

Taigi, $V \leqslant \frac{1}{3} \cdot (a + b + c + d + e + f)^2$, kas užbaigia įrodymą.

12. Cauchy-Schwarz nelygybę naudosime dukart. Pirmiausia, $\wedge$

$$ax + by + cz \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Taigi,

$$\begin{aligned}
\text{KAIRĖ PUSĖ} &\leqslant \sqrt{\sum_{cyc} a^2 \cdot} \sqrt{\sum_{cyc} x^2} + \sqrt{2 \sum_{cyc} ab} \cdot \sqrt{2 \sum_{cyc} xy} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{cyc} x^2 + 2 \sum_{cyc} xy} \cdot \sqrt{\sum_{cyc} a^2 + 2 \sum_{cyc} ab} \\
&= (a + b + c)(x + y + z) \\
&= a + b + c.
\end{aligned}$$

13. Pirmiausia pertvarkome: $\wedge$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a+b+c}{b+c} + \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \leqslant \sum_{cyc} \frac{2a}{b} \Leftrightarrow 3 + 2 \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \leqslant \sum_{cyc} \frac{2a}{b} \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} \geqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{ab}{c(a+c)} + \frac{bc}{a(a+b)} \geqslant \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{a^2c^2}{abc(b+c)} + \frac{a^2b^2}{abc(a+c)} + \frac{b^2c^2}{abc(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Paskutinei nelygybei pritaikę Cauchy-Schwarz nelygybę gausime:

$$\frac{a^2c^2}{abc(b+c)} + \frac{a^2b^2}{abc(a+c)} + \frac{b^2c^2}{abc(a+b)} \geqslant \frac{(ab+bc+ac)^2}{2abc(a+b+c)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Paskutinei nelygybei įrodyti naudojome gerai žinomą faktą, kad realiesiems x, y, z galioja $(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + xz + yz)$.

14. Padauginę nelygybę iš -2 ir prie abiejų pusių pridėję po 3, gausime ekvivalenčią nelygybę $\wedge$

$$\frac{a^2 + b^2}{2 + a^2 + b^2} + \frac{a^2 + c^2}{2 + a^2 + c^2} + \frac{c^2 + b^2}{2 + c^2 + b^2} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Naudosimes Cauchy-Schwarz nelygybe:

$$\begin{aligned}
\text{KAIRĖ PUSĖ (1)} &\geqslant \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}\right)^2}{6 + 2(a^2+b^2+c^2)} \\
&= \frac{2(a^2+b^2+c^2) + 2\sum_{cyc} \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{6 + 2(a^2+b^2+c^2)} \\
&\geqslant \frac{2(a^2+b^2+c^2) + 2\sum_{cyc} (a^2+bc)}{6 + 2(a^2+b^2+c^2)} \\
&= \frac{(a+b+c)^2 + 3(a^2+b^2+c^2)}{6 + 2(a^2+b^2+c^2)} \\
&= \frac{3(3+a^2+b^2+c^2)}{2(3+a^2+b^2+c^2)} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

15. Visur taikysime Cauchy-Schwarz nelygybę. Pastebėkime, kad $\wedge$

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2) &= (a^2+1)(1+b^2)+a^2+b^2+3\\ &\geqslant (a+b)^2+\frac{(a+b)^2}{2}+3\\ &= \frac{3}{2}((a+b)^2+2).\end{aligned}$$

Tuomet

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) &\geqslant \frac{3}{2}((a+b)^2+2)(2+c^2)\\ &\geqslant \frac{3}{2}(\sqrt{2}(a+b)+\sqrt{2}c)^2\\ &= 3(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Specialios technikos

1. Pirma mintis - atlikti homogenizuojantį keitinį $a=\frac{x}{y}$, tačiau netrunkame įsitikinti kad tai nieko gero neduoda, todėl tenka pasukti galvą ieškant kitokio kelio. Ir štai - keitinys $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ išspręs problemą. Žinoma, nepamirškime, kad vistiek $xyz=1$. Nelygybė tampa $\wedge$

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geqslant\frac{6}{x+y+z}.$$

Kadangi

$$xy+yz+xz\leqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2,$$

tai belieka įrodyti:

$$1+\frac{9}{(x+y+z)^2}\geqslant\frac{6}{x+y+z},$$

kas seka iš AM-GM.

2. Nesunku pamatyti, kad reikia pasikeisti $a=\frac{2x}{y}$, $b=\frac{2y}{z}$, $c=\frac{2z}{a}$. Gausime nelygybę: $\wedge$

$$\frac{2x-2y}{2x+y}+\frac{2y-2z}{2y+z}+\frac{2z-2x}{2z+x}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\geqslant 1.$$

Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\sum_{cyc}\frac{x}{2z+x}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{x(2z+x)+y(2x+y)+z(2y+z)}=1.$$

3. Kadangi $abc=1$, keičiame $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$. Tuomet gausime, kad reikia įrodyti $\wedge$

$$\sum_{cyc}\frac{z^2}{y^2+xz}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Pritaikome Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\sum_{cyc} \frac{z^4}{z^2y^2 + xz^3} \geqslant \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xz^3 + yx^3 + zy^3}.$$

Belieka įrodyti

$$2(x^2+y^2+z^2)^2 \geqslant 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xz^3 + yx^3 + zy^3),$$

kas ekvivalentu šių dviejų nelygybių (kurios galioja pagal AM-GM nelygybę) sumai:

$$\sum_{cyc} x^4 \geqslant \sum_{cyc} x^3y$$

ir

$$\sum_{cyc} x^4 + x^2y^2 \geqslant 2\sum_{cyc} x^3y.$$

4. Duota nelygybė yra homogeninė, todėl ją įrodysime kai $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. ∧
Nelygybė tampa:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{d}{1-d^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Pagal AM-GM nelygybę:

$$2a^2(1-a^2)(1-a^2) \leqslant \left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow a(1-a^2) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Taigi:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{d}{1-d^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5. Kadangi turime homogeninę nelygybę, nemažindami bendrumo tariame, kad $a+b+c=3$. Pertvarkę gausime: ∧

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leqslant 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \leqslant 24$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{8a+6}{(a-1)^2+2} + \frac{8b+6}{(b-1)^2+2} + \frac{8c+6}{(c-1)^2+2} \leqslant 24.$$

Kadangi $(x-1)^2+2 \geqslant 2$ visiems x, tai belieka įrodyti

$$8(a+b+c)+18 \leqslant 42,$$

kas pagal sąlygą $a+b+c=3$ yra tapatybė.

6. Pasikeiskime $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Sąlyga taps $xy + xz + yz = 1$. Pagrindinė nelygybė: $\wedge$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leqslant \frac{3}{2},$$

arba

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+xz+xy+yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+xz+xy+yz}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+xz+xy+yz}} \leqslant \frac{3}{2},$$

arba

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Pagal AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} &= \sum_{cyc} \frac{x\sqrt{(x+y)(x+z)}}{(x+y)(x+z)} \\
&\leqslant \sum_{cyc} \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x+y)+x(x+z)}{(x+y)(x+z)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{x}{x+z} + \frac{x}{x+y} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

7. Pasikeiskime $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{t}$, $d = \frac{t}{u}$, $e = \frac{u}{a}$. Tada po nedidelių pertvarkymų gausime: $\wedge$

$$\sum_{cyc} \frac{a+abc}{1+ab+abcd} = \sum_{cyc} \frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{t}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}}.$$

O tada dar pakeitę $\frac{1}{x} = a_1$, $\frac{1}{y} = a_2$, $\frac{1}{z} = a_3$, $\frac{1}{t} = a_4$, $\frac{1}{u} = a_5$ ir paprastumo dėlei pažymėję $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, gausime, kad reikia įrodyti

$$\sum_{cyc} \frac{a_2+a_4}{a_1+a_3+a_5} \geqslant \frac{10}{3}. \tag{1}$$

Dabar taikome Cauchy-Schwarz nelygybę, nežymiai pertvarkome vardiklį ir dar kartą taikome Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\begin{aligned}
\text{KAIRĖ PUSĖ(1)} &\geqslant \frac{4S^2}{\sum\limits_{cyc}(a_2+a_4)(a_1+a_3+a_5)} \\
&= \frac{4S^2}{2S^2 - \sum\limits_{cyc}(a_1+a_3)^2} \\
&\geqslant \frac{4S^2}{2S^2 - \frac{4S^2}{5}} \\
&= \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

8. Neprarasdami bendrumo tariame, kad $a+b+c+d=1$. Tuo naudodamiesi įrodysime, kad ∧

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geqslant abc+bcd+cda+dab.$$

Tai reikalauja tiesiog pertvarkyti nelygybę ir pritaikyti faktą $x^2 \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) &= a^2c^2+b^2d^2+2abcd+\sum_{cyc} abc(a+b+c)\\ &= (ac-bd)^2+\sum_{cyc} abc(a+b+c+d)\\ &\geqslant \sum_{cyc} abc.\end{aligned}$$

Dabar įrodysime

$$\left(\sum_{cyc} abc\right)^3 \geqslant 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d).$$

Pakeitę $abc=x$, $bcd=y$, $cda=z$, $dab=t$, gauname

$$(x+y+z+t)^3 \geqslant 16(xyz+yzt+ztx+txy).$$

Taikykime AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned}&\text{KAIRĖ PUSĖ} =\\ =\ &\sum_{cyc} x^3+\frac{3}{2}\sum_{sym} x^2y+6\sum_{cyc} xyz\\ =\ &\frac{1}{3}\sum_{cyc} x^3+y^3+z^3+\frac{1}{4}\sum_{sym} x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+6\sum_{cyc} xyz\\ \geqslant\ &\sum_{cyc} xyz+\frac{3}{2}\sum_{sym} xyz+6\sum_{cyc} xyz\\ =\ &16\sum_{cyc} xyz.\end{aligned}$$

9. Sąlyga $a,b,c \in [0,1]$ sufleruoja apie trigonometrinį keitinį. Ir išties, pasikeitę $a=\sin^2 x$, $b=\sin^2 y$, $c=\sin^2 z$, kur $x,y,z \in [0,\frac{\pi}{2}]$, gauname tai, ką reikia: ∧

$$\sin x \sin y \sin z+\cos x \cos y \cos z < \sin x \sin y+\cos x \cos y = \cos(x-y) < 1.$$

10. Pakeitę $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$, padalinę iš xyz ir sutvarkę nelygybę gausime, jog tereikia įrodyti ∧

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y} \geqslant 2x+2y+2z.$$

Tačiau tai yra dviejų nelygybių, kurios tiesiogiai įrodomos su Cauchy-Schwarz nelygybe, suma:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geqslant x+y+z$$

ir

$$\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y} \geqslant x+y+z.$$

11. Nelygybę dauginame iš 4, pertvarkome, tada taikome Cauchy-Schwarz nelygybės Engel formą, nes iš trikampio nelygybės seka, kad visi vardikliai teigiami: ∧

$$\begin{aligned}
4\cdot(\text{KAIRĖ PUSĖ}) &= 3+\frac{a+b-c}{3a-b+c}+\frac{b+c-a}{3b-c+a}+\frac{c+a-b}{3c-a+b}\\
&\geqslant 3+\frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}(a+b-c)(3a-b+c)}\\
&= 3+\frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}3a^2-ab+ac+3ab-b^2+bc-3ac+bc-c^2}\\
&= 4.
\end{aligned}$$

12. Atliekame Ravi keitinį: $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$. Gausime: ∧

$$3\left(\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(z+y)(x+z)}\right)\geqslant 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2.$$

Bet pagal AM-GM nelygybę:

$$\sqrt{(x+y)(x+z)}=\sqrt{x^2+xy+xz+yz}\geqslant\sqrt{x^2+2x\sqrt{yz}+yz}=x+\sqrt{yz}.$$

Analogiškai pasielgę su likusiais nariais gausime naują nelygybę, kuriai vėl taikome AM-GM nelygybę:

$$\begin{aligned}
3(x+y+z)+3(\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}) &\geqslant 2(x+y+z)+4(\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy})\\
&= 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2.
\end{aligned}$$

13. Pertvarkykime kairės pusės dėmenis, kad jie taptų „apversti" ir iškart taikykime AM-GM nelygybę: ∧

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a+ab^2-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geqslant a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}.$$

Analogiškai pertvarkius likusius dėmenis, nelygybė pavirs į

$$\sum_{cyc}\frac{a}{1+b^2}\geqslant a+b+c-\frac{1}{2}\sum_{cyc}ab\geqslant\frac{3}{2}.$$

Paskutinę nelygybę įrodome pasinaudoję faktu

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}=3.$$

14. Pertvarkome, taikome AM-GM: ∧

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{a+ab^2c-ab^2c}{1+b^2c} &\geqslant \sum_{cyc}a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}\\
&= \sum_{cyc}a-\frac{1}{2}b\sqrt{ac\cdot a}\\
&\geqslant \sum_{cyc}a-\frac{1}{4}b(ac+a)\\
&= a+b+c+d-\frac{1}{4}\sum_{cyc}abc-\frac{1}{4}\sum_{cyc}ab.
\end{aligned}$$

Pagal AM-GM nelygybę:

$$\sum_{cyc} abc \leqslant \frac{1}{16}(a+b+c+d)^3 = 4,$$

o pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\sum_{cyc} ab = (a+b+c+d)^2 - (a+c)^2 - (b+d)^2 \leqslant (a+b+c+d)^2 - \frac{(a+b+c+d)^2}{2} = 4.$$

Taigi,

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2a} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geqslant a+b+c+d-2 = 2.$$

15. Pertvarkome, taikome AM-GM: $\wedge$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a_n^3+2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{cyc} \frac{a_n^3}{a_n^3+2} \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a_n^3}{3a_n} = \frac{n}{3}.$$

16. Naudosime *Cauchy Reverse Technique*: $\wedge$

$$\sum_{cyc} \frac{a+1}{b^2+1} = \sum_{cyc} a+1 - \frac{ab^2+b^2}{b^2+1} \geqslant \sum_{cyc} a+1 - \frac{ab+b}{2}.$$

Pagal Cauchy-Schwarz nelygybę:

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} ab &= \frac{1}{2}((a+b+c+d)^2 - (a+c)^2 - (b+d)^2)\\ &\leqslant \frac{1}{2}((a+b+c+d)^2 - \frac{(a+b+c+d)^2}{2}) = 4.\end{aligned}$$

Taigi:

$$\sum_{cyc} \frac{a+1}{b^2+1} \geqslant a+b+c+d+4 - \frac{4+a+b+c+d}{2} = 4.$$

17. *Lema.* $x(2-x) \leqslant 1$, su realiais x. $\wedge$
Lemos įrodymas. $\Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$ $\square$
Pertvarkome pagrindinę nelygybę ir taikome lemą:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{2-a} = \frac{3}{2} + \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a(a-2)} \geqslant \frac{3}{2} + \sum_{cyc} \frac{a^2}{2} = 3.$$

18. Pertvarkome ir du kartus taikome AM-GM bei nelygybę $ab+bc+ac \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{3}$: $\wedge$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a^2}{a+2b^3} &= \sum_{cyc} a - \frac{2b^3a}{a+2b^3}\\ &\geqslant \sum_{cyc} a - \frac{2b^3a}{3\sqrt[3]{ab^6}} = \sum_{cyc} a - \frac{2}{3}\sqrt[3]{b^3a^2}\\ &\geqslant \sum_{cyc} a - \frac{2}{9}(ab+ab+b)\\ &\geqslant a+b+c - \frac{2}{27}\Big(2(a+b+c)^2 + 3(a+b+c)\Big) = 1.\end{aligned}$$

Funkcinės lygtys

Įsistatykime $x = 0$

1. Įsistatykime $y = 0$, gausime $f(x) = x^2$. Patikrinę matome, kad ši funkcija tinka. $\wedge$

2. Įsistatykime $y = 0$. Gausime, kad su visais x turi būti $f(x) = 1$, tačiau ši funkcija lygties netenkina. Sprendinių nėra. $\wedge$

3. Įsistatę $x = 0$ gauname $f(y) = (y+1)f(0)$, t.y. vienintelės funkcijos kurios galėtų tikti yra $f(x) = c(x+1)$. Patikrinę gauname, kad tinka tik $c = 0$, t.y. $f(x) = 0$. $\wedge$

4. Įsistatykime vietoje y bet kokį nelygų nuliui skaičių, pavyzdžiui 1. Gausime $f(x) = f(1)x$, vadinasi, ieškomos funkcijos bus pavidalo $f(x) = cx$, kur c reali konstanta. Patikrinę gauname, kad visos tokios funkcijos tinka. $\wedge$

5. Įsistatykime $y = -1$, gausime $f(x + f(-1)) = 0$. Kadangi $f(-1)$ yra konkretus skaičius, tai $x = f(-1)$ įgyja visas realias reikšmes, iš kur gauname, kad funkcija turi tenkinti $f(x) = 0$. Patikrinę matome, kad šis sprendinys tinka. $\wedge$

6. Įsistatykime $x = -x$. Gausime $-xf(-x) + f(x) + 1 = 0$. Iš pradinės lygties išsireiškę $f(-x)$ ir įsistatę gausime $f(x) = -\frac{1+x}{1+x^2}$, kas ir yra sprendinys. $\wedge$

7. Įsistatę $x = \frac{x-1}{x}$ ir $x = \frac{1}{1-x}$ kartu su pradine turime tris lygtis, iš kurių paplušėję išsireiškiame $f(x)$. Gauname $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2x-1}{2x-2x^2}$. $\wedge$

8. Įsistatę $x = 1$ ir $z = 1$ gauname $f(t) = tf(1)$, t.y. funkcija gali būti tiktai pavidalo $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$. Patikrinę matome, kad visos tokios funkcijos tinka. $\wedge$

9. Įsistatykime $y = 0$ ir $y = 1$. Iš gautų lygybių gauname, kad $f(x)$ - tiesinė funkcija $(f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0))$. Patikrinę matome, kad funkcijos $f(x) = ax + b$ tinka su visais $a, b \in \mathbb{R}$. $\wedge$

10. Įstatę vietoje t bet kokią reikšmę, su kuria $f(t) \neq 0$ gauname, kad $f(x)$ - tiesinė funkcija. Patikrinę gauname, kad tinka tik $f(x) = x + 1$. $\wedge$

11. Taip: $\wedge$
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^3, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

12. Įsistatę $x = y$ gauname $f(f(0)) = -x^2 - f(x)^2$. Įsistatę $x = y = 0$ gauname $f(f(0)) = -f(0)^2$. Iš šių dviejų lygybių gauname $f(0)^2 - x^2 = f(x)^2 \geqslant 0$, kas negalioja su visais $x \in \mathbb{R}$. Vadinasi funkcijų tenkinančių lygtį nėra. $\wedge$

13. Kadangi visiems realiesiems a, b egzistuoja tokie x,y, kad $x + y = a$ ir $x - y = b$, tai lygtį galime užrašyti $b^2f(a) = a^2f(b)$. Jei egzistuoja toks b_0, kad $f(b_0) \neq 0$, tai jį įstatę vietoje b gauname $f(a) = ca^2$, kur c - konstanta (jei neegzistuoja, tai $f(x) = 0$). Įstatę gauname, kad c tegali būti lygus 1, vadinasi, sprendiniai yra $f(x) = x$ ir $f(x) = 0$. $\wedge$

14. Įstatę $x = 0$ ir įstatę $y = 0$ gauname $f(f(x)) = f(f(0)) + x$ ir $f(x + f(0)) = f(f(x))$, iš kur $f(x + f(0)) = f(f(0)) + x \implies f(x) = x + c$. ∧

15. Įsistatykime $x = y$ ir $y = x$ (t.y sukeiskime kintamuosius vietomis). Gausime $f(x + y) = 3^x \cdot f(y) + 2^y \cdot f(x)$. Atėmę iš šios lygybės pradinę ir įsistatę $y = 1$ gausime $f(x) = 3^x - 2^x$. Patikriname - tinka. ∧

16. Rasti bent vieną funkciją nėra visai paprasta, tačiau kiek pamąstę matome, kad $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Taip pat tiks ir $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ir $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$. ∧

    Įstatykime $x = 1$ ir $y = 1$. Gausime $f(1)^2 = 2f(1)$. Kadangi funkcija įgyja tik teigiamas reikšmes, tai $f(1) = 2$.

    Įstatykime $y = x$. Gausime, kad $f(x)^2 = f(x^2) + 2$. Kadangi su visais $x \in \mathbb{R}$ $f(x^2) \geqslant 0$, tai su visais $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geqslant \sqrt{2}$. Dabar, kadangi su visais $x \in \mathbb{R}$ $f(x^2) \geqslant \sqrt{2}$, tai su visais $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geqslant \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Taip tęsdami, gauname, kad su kiekvienu x ir kiekvienu $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) \geqslant \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}.$$

    Kadangi, kai n artėja į begalybę, $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n}$ artėja į 2 (seka akivaizdžiai didėjanti, mažesnė už $2 \Rightarrow$ turi ribą. Ją randame išsprendę $\sqrt{2+x} = x \Rightarrow x = 2$), tai $f(x) \geqslant 2$.
    c.) dalyje užtenka pasinaudoti įsistačius $f(x)^2 = f(x^2) + 2$, ir norint įsitikinti, kad $f^2(x) - 2 \geqslant 0$ - b.) dalyje gauta nelygybe.

17. Atkreipsime dėmesį, kad jei nebūtų lygties apribojimo vien teigiamiems skaičiams, tai įsistatę $y = 0$ iš karto gautume, kad $f(x) = c$. Tačiau apribojimas yra, todėl suktis teks kiek kitaip. ∧

    Fiksuokime sumą ir žiūrėkime, kaip kinta sandauga. T.y. įsistatykime pvz., $y = 2-x$. Gausime $f(x(2-x)) = f(2)$. Kadangi galime statyti tik teigiamas reikšmes, tai ši lygybė yra teisinga tik, kai $x \in (0, 2)$. Šiame intervale, kintant x reikšmei, reiškinio $x(2-x)$ reikšmė kinta nuo 0 iki 1, t.y. $x(2-x) \in (0, 1]$. Tad gauname, kad $f(x)$ yra pastovi intervale $(0, 1]$. Lieka pastebėti, kad ji periodinė: įstatę $y = 1$ gausime $f(x) = f(x + 1)$, todėl pastovi ir visur.

18. Fiksuokime sumą. Tegu $x = 2-y$. Tuomet $f(2) = f(\frac{2}{x(2-x)})$. Kai x kinta nuo $-\infty$ iki ∞ reiškinys $\frac{2}{x(2-x)}$ kinta intervaluose $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, \infty)$, kartu ir funkcija tuose intervaluose pastovi. Likusią dalį $(0, \frac{1}{2})$ galime prijungti naudodami $f(x + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{x} + 2)$. Pastebėsime, kad funkcijos reikšmė taške 0 taip ir lieka neapibrėžta. Atsakymas ∧

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

19. Atsikratykime penketo: įsistatykime $f(x) = g(x) - \frac{5}{2}$. Gausime, kad g tenkina lygtį $g(2x+1) = g(x)$. Pabandę pirmas keletą reikšmių gausime, kad

$$g(1) = g(0), g(3) = 3g(0), g(7) = 3^2 g(0), g(15) = 3^3 g(0).$$

Įsižiūrėję pamatysime, kad taip tęsdami gausime

$$g(2^n - 1) = 3^{n-1} g(0).$$

Pažymėję $2^n - 1 = x$ gauname $n = \log_2(x+1)$ arba $g(x) = 3^{\log_2 \frac{x+1}{2}} \cdot g(0)$. Iš $f(0) = 0$ seka, kad $g(0) = \frac{5}{2}$ ir susitvarkę su neigiamų skaičių keliamais nepatogumais gauname, kad

$$f(x) = 3^{\log_2 \frac{|x+1|}{2}} \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2}$$

tenkina lygtį.

20. Įsistatykime $y = 0$ ir $y = 1$:

$$\begin{aligned} f(x^3) &= (x^2 + x + 1)(f(x) - f(1)) + f(1), \\ f(x^3) &= x^2(f(x) - f(0)) + f(0). \end{aligned}$$

Lygybės teisingos su visomis x reikšmėmis, tad sulyginę dešiniąsias puses gausime

$$f(x) = xf(1) + (1 - x)f(0),$$

t.y. funkcija tiesinė. Patikrinę matome, kad lygtį tenkina visos funkcijos $f(x) = ax + b$, kur $a, b \in \mathbb{R}$.

21. Šis uždavinys, nors ir paprastas, yra gerai žinomi spąstai. Iš pirmo žvilgsnio padaryta išvada, kad sprendinai yra tik $f(x) = 1$ ir $f(x) = -1$ nėra teisinga. Atidžiau pažvelgus tampa aišku, kad viskas, ką galima pasakyti apie funkciją, yra tai, kad bet kuriame taške ji įgyja reikšmę 1 arba -1. Užrašius tą matematiškiau, sprendiniai atrodo kaip

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ -1, & x \notin A, \end{cases}$$

kur A bet koks $\mathbb{R}$ poaibis.

Funkcijų tipai

1. Jei funkcija griežtai didėjanti, tai visiems skirtingiems $a > b$ turėsime $f(a) > f(b)$, todėl funkcija neįgis vienodų reikšmių.

   Bijektyvi funkcija nebūtinai turi būti monotoniška. Pavyzdžiui, $f(x) = \frac{1}{x}$, kai $x \neq 0$, ir $f(0) = 0$.

2. Negali, nes, pavyzdžiui, įstatę $x = 0$ matome, kad $f(y) = f(-y)$ su visais y.

3. Įstatę $x = -x$ ir $y = -y$ gauname $f(x + y) = -f(-x - y) \Rightarrow f(t) = -f(-t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

4. Lyginės monotoninės yra tik $f(x) = c$, $f : A \to \mathbb{R}$, lyginė injektyvi tik $f(0) = c$, $f : \{0\} \to \mathbb{R}$ (jei dar bent viena taškų pora priklausytų apibrėžimo sričiai iš karto gautume neinjektyvią). Lyginės surjektyvios pavyzdys gali būti $f(x) = ln|x|$, kai $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

5. Tegu $a > b$. Įstatę $x = b$, $y = a - b$ gausime $f(a)f^2(a-b) = f(b)$. Kadangi $f(a-b)^2 \leqslant 1$, tai $f(a) \geqslant f(b)$.

6. Jei žinome, kad funkcija yra surjektyvi, tai egzistuoja toks a, kad $f(a) = 1$. Įstatę gauname $f(a \cdot 1) = a \Rightarrow 1 = a$, vadinasi $f(1) = 1$.

7. Įrodysime, kad $f(x) = x$. Tarkime priešingai - tegu egzistuoja toks a, kad $f(a) > a$. Tuomet, kad kadangi f yra didėjanti, tai

$$f(a) > a \Rightarrow f(f(a)) > f(a) \Rightarrow f(f(a)) > f(a) > a \Rightarrow f(f(a)) \neq a \text{ - prieštara.}$$

   Tardami, kad $f(a) < a$, prieštarą gauname analogiškai.

8. Įstatę $x = 0$ ir $x = 1$ gauname, kad $f(a+b) = f(b)$, todėl pasinaudoję injektyvumu gauname $a = 0$. Įstatę $x = b$ gauname $f(b)f(1-b) = f(b)$, tad arba $f(1-b) = 1$, arba $f(b) = 0$. Tačiau $f(b)$ negali būti lygus nuliui, nes gautume $f(x)f(1-x) = 0$, o iš čia be galo daug reikšmių, su kuriomis funkcija lygi nuliui, kas prieštarauja injektyvumui. Galiausiai pastebėkime, kad funkcija nulio iš vis neįgyja, nes jei, tarkime, $f(c) = 0$, tai įstatę gauname $f(b) = 0$, ko negali būti. Taigi ji nėra surjektyvi.

9. Įsistatykime $x = y$, $y = x$, gausime $f(x + f(y)) = f(y + f(x))$. Kadangi f yra griežtai didėjanti, tai ji injektyvi, tai $x + f(y) = y + f(x) \Rightarrow f(x) = x + c$. Įstatę randame $c = 2005$.

10. Įsistatykime $x = y$, gausime $(y + y)(f(y)y) = y^2 f(f(y) + f(y))$. Jei $f(x) = f(y)$, tai iš abiejų lygybių gauname $\frac{x^2}{x+y} = \frac{y^2}{y+y} \Rightarrow x = y$. Gavome kad funkcija injektyvi. Įstatykime $y = 1$ ir $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lambda$, t.y. lygties $x + 1 = x^2$ sprendinį. Tuomet gausime, kad $f(f(\lambda)) = f(f(1) + f(\lambda)) \Rightarrow f(1) = 0$, o taip būti negali.

11. Nesunku pastebėti, kad funkcija yra injektyvi. Įsistatę $x = 1, y = 1$ gauname $f(f(1)) = f(1) \implies f(1) = 1$. Įsistatę $x = 1$ gauname $(y+1)f(y) = f(y)+1 \implies f(y) = \frac{1}{y}$.

12. Kadangi g yra surjektyvi ir $f(y) + x$ įgyja visas realiąsias reikšmes, tai iš lygybės gauname, kad ir f surjektyvi. Tegu a toks, kad $g(a) = 0$. Įstatę $x = a$ gauname $f(y) = g(f(y) + a)$. Kadangi f surjektyvi, tai $g(x) = x - a$ su visas $x \in \mathbb{R}$. Įstatę g išraišką į pradinę lygybę gauname, kad $f(x + y - a) = f(y) + x - a$. Įstatę $y = a$ gauname $f(x) = x + b$. Vadinasi, sprendiniai yra $g(x) = x + a$, $f(x) = x + b$, kur $a, b \in \mathbb{R}$.

13. Įrodykime, kad f injektyvi. Naudodami keitinį $x + y = a$, $xy = b$ gauname lygtį $f(a + f(b)) = f(f(a)) + b$. Tačiau ji galioja ne visiems a ir b, o tik tenkinantiems sąlygą $4b \leqslant a^2$, nes kitaip sistema $x + y = a$, $xy = b$ neturi sprendinių. Bet tai ne bėda - kiekvieniem b_1 ir b_2 galime paimti a tokį, kad $4b_1 \leqslant a^2$ ir $4b_2 \leqslant a^2$. Tuomet

galime naudotis lygtimi ir iš $f(b_1) = f(b_2)$ gauname $b_1 = b_2$ - injektyvumas įrodytas. Įstatykime į pradinę lygtį $y = 0$, gausime $f(x + f(0)) = f(f(x))$, iš injektyvumo $f(x) = x + c$.

14. Iš lygybės $g(f(x)) = x^3$ seka, kad f yra injektyvi ir kad $f(g(f(x))) = f(x^3) \Rightarrow f^2(x) = f(x^3)$. Įsistatę $x = -1, 0, 1$ gauname, kad $f(-1)$, $f(0)$ ir $f(1)$ gali įgyti tik reikšmes 0 arba 1, kas prieštarauja injektyvumui. ∧

15. Pastebėkime, kad f injektyvi. Įstatykime $x = 0$, gausime $f(f(0)) = \frac{f(0)}{2}$. Įstatykime $x = f(0)$, gausime $4f(f(f(0))) = 2f(f(0)) + f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, iš kur $f(f(f(0))) = \frac{f(0)}{2} = f(f(0))$. Naudodamiesi injektyvumu gauname ∧

$$f(f(f(0))) = f(f(0)) \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Kadangi funkcija injektyvi, tai išties $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

16. Patyrinėkime keitinį $y = \frac{x}{f(x)-1}$. Iš pradžių gali pasirodyti, kad jis yra nuleistas iš dangaus, bet viskas daug paparasčiau - jis tiesiog kyla iš natūralaus noro sulyginti $f(yf(x))$ ir $f(x+y)$ ($yf(x) = x + y \implies y = \frac{x}{f(x)-1}$). Tačiau prisiminkime, kad funkcijos apibrėžimo sritis yra teigiami skaičiai. Tuomet tenka samprotauti taip: jei egzistuoja toks x, kad $f(x) > 1$, tai galime įsistatyti $y = \frac{x}{f(x)-1}$ ir gausime $f(x)f(\frac{xf(x)}{f(x)-1}) = f(\frac{xf(x)}{f(x)-1}) \Rightarrow f(x) = 1$ - prieštara! ∧

Vadinasi gavome, kad $f(x) \leqslant 1$ ir, iš pradinės lygybės, f yra nedidėjanti ($f(x + y) = f(x)f(yf(x)) \leqslant f(x)$).

Nagrinėkime injektyvumą: Jei egzistuoja tokie $a < b$, kad $f(a) = f(b)$, tai gauname, kad $f(a + y) = f(b + y)$ su visais y, todėl $f(y) = f(b - a + y)$ su visais $y > a$, vadinasi, funkcija yra monotoniška ir periodinė $\Rightarrow f(x) = c$ su visais $x > a$. Įsistatę į pradinę lygtį pakankamai didelius x ir y gauname $c = 1$, o įsistatę x pakankamai didelį gauname $f(y) = 1$ su visais y. Lieka atvejis, kai funkcija yra injektyvi. Pakeitę $y = \frac{z}{f(x)}$ gausime $f(x)f(z) = f(x + \frac{z}{f(x)})$ su visais $z, x > 0$. Sukeitę x ir z vietomis bei pasinaudoję injektyvumu gauname $x + \frac{z}{f(x)} = z + \frac{x}{f(z)}$, iš kur lengvai randame $f(x) = \frac{1}{1+cx}$, kur $c \in \mathbb{R}^+$.

17. Tegu $f(x_0) = 1$, tada įsistatę $x = x_0$ gauname $f(x_0 + y) = f(y)$, vadinasi, funkcija yra periodinė ir vienetą įgis be galo daug kartų, o to būti negali, vadinasi, $f(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$. ∧

Tegu $f(a) = f(a + b)$, tuomet įsistatykime $x = a, y = \frac{b}{f(a)}$, gausime $1 = f(\frac{b}{f(a)})$, prieštara, vadinasi funkcija injektyvi.

Pradinėje lygtyje įstatykime $x = y$, $y = x$, gausime $f(x + yf(x)) = f(x)f(y) = f(y + xf(y))$. Kadangi f injektyvi, tai $x + yf(x) = y + xf(y) \rightarrow f(x) = kx + 1$. Patikrinę matome, kad tinka.

18. Pastebėkime, kad f injektyvi. Įstatę $x = 0$, $y = 0$ ir pažymėję $f(0) + f(f(0)) = u$ gauname $f(u) = u$. Įstatę $y = u$ gauname $f(x + u) = f(f(x) + u) \Rightarrow f(x) + u = x + u \Rightarrow f(x) = x$. ∧

19. Funkcija akivaizdžiai bijektyvi, todėl egzistuoja toks x_0, kad $f(x_0) = 0$. Įsistatę $x = x_0$ gauname $f(f(y)) = y$. Įsistatę $x = f(x)$ gauname $f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y = f(f^2(x) + f(y))$. Kadangi f injektyvi, tai $f^2(x) = f(x)^2$. Vadinasi, kiekviename taške x funkcija lygi arba x, arba $-x$. Tegu egzistuoja du nenuliniai taškai, kuriuose $f(x) = x$ ir $f(y) = -y$. Tuomet gauname $f(x^2+y) = x^2-y$, kas yra neįmanoma ($x^2 + y = x^2 - y \implies y = 0$, $-x^2 - y = x^2 - y \implies x = 0$). Vadinasi, tinka tik $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$.

20. Funkcija bijektyvi. Įstatykime $x = 0$ ir $x = a$, kur a toks, kad $f(a) = 0$. Gausime lygybes $f(f(y)) = f^2(0) + y$ ir $f(f(y)) = y$, iš kur $f(0) = 0$ ir $a = 0$.

    Įstatykime $x = f(x)$ ir pasinaudokime lygybe $f(f(x)) = x$. Gausime $f(f(x)x + f(y)) = x^2 + y$, vadinasi $f^2(x) = x^2$ su visais x.

    Tegu x ir y tokie, kad $f(x) = x$ ir $f(y) = y$ ir x,$y \neq 0$. Tada iš pradinės lygties gauname $f(x^2 - y) = x^2 + y$. Kadangi $f(x^2 - y)$ gali būti lygus tik $x^2 - y$ arba $y - x^2$, tai gauname, kad arba $y = 0$ arba $x = 0$ - prieštara. Vadinasi, sprendiniai yra $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$.

21. Įstatę $y = z = 0$ gauname $f(h(g(x))) = x + h(0)$. Įstatę $y = 0$ gauname $g(z + f(0)) = g(f(z))$. Kadangi g injektyvi (atkreipkite dėmesį į kintamąjį x pradinėje lygtyje), tai $f(x) = x + a$.

    Įsistatę gauname lygtį $h(g(x))+y+a = h(y)+x$, iš kurios akivaizdžiai $h(x) = x+b$, ir $g(x) = x - a$.

22. Funkcija injektyvi. Raskime $f(0)$: $x = 0 \Rightarrow f(f(y)) = y + f^2(0) \Rightarrow f(f(0)) = f^2(0)$. Pažymėkime $f(0) = a$, tuomet paskutinioji lygybė pavirsta į $f(a) = a^2$. Įstatykime $x = 0$, $y = a$ ir $x = a$, $y = 0$. Gausime $f(a^2) = a^2 + a$ ir $f(a^2 + a) = a^4 + a^2$. Iš čia $f(f(a^2)) = f(a^2 + a) \implies 2a^2 = a^4 + a^2 \implies a = -1{,}0$ arba 1.

    Jei $f(0) = 1$, tai tuomet iš $f(f(y)) = y + f^2(0)$ gauname $f(1) = 1$ - prieštara injektyvumui.

    Jei $f(0) = -1$, tai iš $f(f(y)) = y + f^2(0)$ gauname $f(-1) = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 2$ - prieštara.

    Vadinasi, $f(0) = 0$. Tuomet $f(f(x)) = x$ ir $f(x^2) = f^2(x)$. Įstatę $x = -y$ gauname $f(f(y)) = f^2(-y) - yf(y) + y \Rightarrow y = f((-y)^2) - yf(y) + y \Rightarrow f^(y) = yf(y)$. Kadangi funkcija injektyvi, tai $f(y) = 0$ tik kai $y = 0 \Rightarrow f(y) = y$.

23. $f(x) = 0$ yra sprendinys, ieškosime likusių. Įrodykime, kad f turi būti lyginė. Pastebėkime, kad $f(f(x) - f(y)) = f(f(y) - f(x))$, todėl užtenka įrodyti, kad $f(x) - f(y)$ įgyja visas reikšmes. Išties, tegu a toks, kad $f(a) \neq 0$. Įstatykime $y = a - x \implies f(f(x) - f(a - x)) = (2x - a)^2 f(a)$. Iš čia matome, kad f įgyja visas teigiamas arba visas neigiamas reikšmes (priklausomai nuo $f(a)$), vadinasi, $f(x) - f(y)$ tikrai įgyja visas realiąsias reikšmes.

    Įstatykime $y = -y$. Gausime $f(f(x)-f(y)) = (x+y)^2 f(x-y) \implies (x-y)^2 f(x+y) = (x+y)^2 f(x-y)$. Kadangi visiems realiesiems a, b egzistuoja tokie x,y, kad $x+y = a$ ir $x-y = b$, tai lygtį galime užrašyti $b^2 f(a) = a^2 f(b) \implies f(x) = cx^2$. Patikrinę gauname $c = 1$, vadinasi, sprendiniai yra $f(x) = x$ ir $f(x) = 0$.

24. Įstatykime $x = 0$, gausime $f(0) + y = f(g(y))$, vadinasi f surjektyvi, g injektyvi.

Įrodykime, kad $g(1) = 1$. Įstatykime $y = 0$, gausime $f(xg(1)) = xf(0) + f(x + g(0))$. Jei $g(1) \neq 1$, tai galime sulyginti $xg(1) = x + g(0)$ paėmę $x = \frac{g(0)}{g(1)-1}$. Tuomet gauname $\frac{g(0)f(0)}{g(1)-1} = 0 \Rightarrow f(0) = g(0) = 0$ (pasinaudojus antrąja sąlyga). Įsistatę $y = -1$ gauname $f(x) = ax$ ir $g(x) = \frac{x}{a}$. Patikrinę gauname, kad $a = 1$, taigi $f(x) = g(x) = x$ - prieštara prielaidai $g(1) \neq 1$.

Iš f surjektyvumo žinome, kad egzistuoja toks u, kad $g(u) = 0$. Įrodykime, kad $u = 0$. Tegu $u \neq 0$, tada $g(u+1) \neq g(1) = 1$ (iš g injektyvumo). Įstatykime $x = \frac{g(u)}{g(u+1)-1}$ ir $y = u$, gausime $u = 0$ - prieštara. Taigi gavome, kad $f(0) = 0$ ir $g(0) = 0$, ir iš čia jau žinome, kad gaunasi $f(x) = g(x) = x$.

25. Įstatykime $x = 0$. Gausime $f(f(y)) = y$. Įstatykime $x = f(x)$, gausime $f(f^2(x) + f(y)) = y + f(x)x = f(x^2 + f(y))$. Kadangi funkcija tenkinanti lygtį yra akivaizdžiai bijektyvi, tai gauname $f^2(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \pm x$.

Tegu x ir y tokie, kad $f(x) = x$ ir $f(y) = -y$ bei $x,y \neq 0$. Tada pradinė lygtis tampa $f(x^2 - y) = y + x^2$. Kadangi $f(x^2 - y) = x^2 - y$ arba $f(x^2 - y) = y - x^2$, tai gauname $y = 0$ arba $x = 0$ - prieštara. Vadinasi, sprendiniai yra tik $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$.

26. Funkcija bijektyvi, todėl egzistuoja toks a, kad $f(a) = 0$. Įsistatę $x = y = a$ gauname $f(a^2) = a \Rightarrow f(f(a^2)) = 0$. Tačiau kadangi $f(f(y)) = y + f^2(0)$, tai $a^2 + f^2(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ ir $f(0) = 0$.

Tuomet iš pradinės lygties gauname, kad $f(x^2) = f^2(x) = f(-x)^2$. Dėl injektyvumo $f(x) \neq f(-x)$, todėl $f(x) = -f(-x)$. Iš čia ir iš $f(x^2) = f^2(x)$ gauname, kad $f(x) > 0$, kai $x > 0$ ir $f(x) < 0$, kai $x < 0$.

Galiausiai įstatę $y = -x^2$ gauname, kad $f(x^2 - f^2(x)) = -(x^2 - f^2(x)) \Rightarrow f^2(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = x$.

27. $f(x) = 0$ yra sprendinys, nagrinėkime galimus likusius. Tegu $f(a) = 0$, tuomet įstatę $x = a$ gausime $0 = af(y) \implies a = 0$, vadinasi, jei 0 yra įgyjamas, tai tik taške 0. Įstatę $x = y = -1$ gausime $f(f(1) - 1) = 0 \implies f(0) = 0, f(1) = 1$.

Įstatę $x = 1$ gauname $f(f(y) + 1) = f(y) + 1(*)$ iš kur $f(n) = n$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Įrodysime, kad f-injektyvi. Pažymėję $xy = a$ gauname $f(x + f(a)) = f(x) + xf(\frac{a}{x})$. Jei $f(a) = f(b)$, tai visiems x teisinga $f(\frac{a}{x}) = f(\frac{b}{x})$. Pakeitę $x = \frac{b}{y}$ ir pažymėję $\frac{a}{b} = m$, gausime, kad su visomis y reikšmėmis $f(ym) = f(y)$. Iš čia randame $f(m) = 1$. Įstatę $x = m$ gauname $f(m + f(y)) = 1 + mf(y)$, iš kur $f(m+1) = m+1$ ($y = 1$) ir $f(m+2) = 1 + 2m$ ($y = 2$). Tačiau pagal (*) $f(m+2) = m+2$ ($y = m+1$), todėl $1 + 2m = m + 2 \implies m = 1 \implies a = b \implies f$ injektyvi.

Įstatykime $x = y = -2 \implies f(-2) = -2 \implies f(-1) = -1$. Įstatykime $x = -1 \implies f(-1 + f(-y)) = -1 - f(y)$.

Naudodamiesi $f(-1 + f(-y)) = -1 - f(y)$ ir $f(f(y) + 1) = f(y) + 1$ gausime, kad kiekvienam x egzistuoja toks y, kad $f(x) = f(y) + 1$. Išties: jei a priklauso f vaizdui $\implies -1 - a$ priklauso vaizdui $\implies -a$ priklauso vaizdui $\implies -1 + a$ priklauso vaizdui. Kadangi kiekvienam x $f(x)$ priklauso vaizdui, tai $f(x) - 1$

priklauso vaizdui, todėl egzistuoja toks y, kad $f(y) = f(x) - 1$. Įstatę į $f(f(y) + 1) = f(y) + 1$ gauname, kad kiekvienam x $f(f(x)) = f(x)$. Kadangi f injektyvi, tai $f(x) = x$.

28. Pastebėkime, kad $f(0) = 0$ ir $f(xf(x)) = x^2(*)$. Įstatę $x = 1$ gauname $f(f(1)) = 1$, įstatę $x = f(1)$ gauname $1 = f(1)^2$. Jei $f(1) = 1$, tai $f(x) + f(f(x)) = 2x$ - f injektyvi. Jei $f(1) = -1$, tai įstatę $x = y = 1$ gauname $f(-1) = 1$ ir įstatę $y = -1$ gauname $f(x) + f(-f(x)) = -2x$ - f injektyvi.

Įrodysime, kad $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$. Įstatykime $y = f(\frac{1}{x})\frac{1}{x}$:

$$f(xf(f(\frac{1}{x})\frac{1}{x})) + f(f(\frac{1}{x})\frac{1}{x}f(x)) = 2f(\frac{1}{x}).$$

Iš (*) gauname, kad

$$f(f(\frac{1}{x})\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2},$$

todėl lygybę galime perrašyti į

$$f(f(\frac{1}{x})\frac{1}{x}f(x)) = f(\frac{1}{x}).$$

Lieka pasinaudoti injektyvumu ir gauname $f(x) = \frac{1}{x}$.

Jei $f(1) = 1$, tai įstatę $x = \frac{1}{x}$ į $f(x) + f(f(x)) = 2x$ gauname

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(f(x))} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2x - f(x)} = \frac{2}{x} \Rightarrow (f(x) - x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = x.$$

Jei $f(-1) = -1$, tai $x = \frac{1}{x}$ statome į $f(x) + f(-f(x)) = -2x$ ir analogiškai gauname $f(x) = -x$.

Cauchy funkcinė lygtis

1. Pasižymėkime $f(x) = g(x)+x^2$. Gausime $g(x+y) = g(x)+g(y)$. Tada $g(x) = kx$, ir $f(x) = kx + x^2$. Nesunku patikrinti, kad sprendinys tiks.

2. Pasižymėkime $f(x) = g(x) + 1$. Gausime $g(x + 1 + g(y)) = g(x + 1) + y$, arba $g(t + g(y)) = g(t) + y$. Iš čia nesunku įsitikinti, kad funkcija bijektyvi. Įstatę $t = y = 0$, gausime $g(0) = 0$, o paskui įstatę $t = 0$ - $g(g(y)) = y$. Tada prieš tai gautoje lygtyje pakeitę $y = g(y)$, gausime Cauchy funkcinę lygtį, iš kur $g(x) = kx$. Nesunku patikrinti, kad tiks tik $k = 1$ arba -1. Randame sprendinius $f(x) = x+1$ arba $f(x) = 1 - x$.

3. Statykime $x = y = 0$. Gausime $h(0) = f(0) - g(0)$. Paimkime pradinėje lygtyje $y = 0$. Tada turėsime $g(x) = f(x) - h(0) = f(x) + g(0) - f(0)$. Paimkime pradinėje lygtyje $x = 0$. Gausime $h(y) = f(y) - g(0)$. Įstatę gautas $g(x)$ ir $h(y)$ išraiškas į pradinę lygtį gausime: $f(x + y) = f(x) + f(y) - f(0)$. Įsivedę keitinį $i(x) = f(x) - f(0)$, gausime, kad i tenkina Cauchy funkcinę lygtį ir yra tolydi vadinasi $i(x) = kx$. Tada, jei pažymėsime $f(0) = a$ ir $g(0) = b$, gausime $f(x) = kx + a$, $g(x) = kx + b - a$, $h(x) = kx - b$

   Įstatę į pradinę lygtį, gausime, kad $a = 0$, o k ir b - bet kokios realiosios konstantos.

4. Pasižymėkime $f(x) = g(x) + 1$. Tada pradinė lygtis virs $g(xy) + g(x + y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y)$. Įsistatę $x = y = 0$ gausime $g(0) = 0$. Tada, pažymėję $g(1) = k$, po nesudėtingos indukcijos gausime
$$g(n) = k^n + k^{n-1} + ... + k, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Jei $g(1) = 1$, tai gausime $g(n) = n$, kitu atveju $g(n) = \frac{k^{n+1}-1}{k-1} - 1$. Įstatę į prieš tai turėtą lygtį ir išprastinę gausime
$$k^{xy+2} - k^{xy+1} - k^{x+y+1} = k^2 - k^{x+1} - k^{y+1}.$$
Čia galime statyti bet kokius naturaliuosius x ir y. Tą darydami, nesunkiai gausime $k = 1, 0, -1$. Kai $k = 0$ gausime sprendinį $f(x) = 1$. Kai $k = -1$, nesunkiai gausime prieštarą. Kai $k = 1$, pradinėje lygtyje įstatę $x = 1, y = -1$ gausime $g(-1) = -1$. Tada pradinėje lygtyje paėmę $y = -1$, o paskui $x = -x, y = 1$ ir sudėję abi gautas lygybes gausime $-g(x) = g(-x)$ visiems $x \in \mathbb{R}$. Tada pradinėje lygybėje paėmę $x = -x, y = -y$ ir pritaikę paskutiniąją lygybę gausime: $g(xy) - g(x + y) = g(x)g(y) - g(x) - g(y)$. Sudėję su pradine lygybę gausime $g(x + y) = g(x) + g(y)$ ir $g(xy) = g(x)g(y)$, iš ko, kaip jau matėme pavyzdyje, gausime $g(x) = x$. Taigi, šios lygties sprendiniai yra $f(x) = x + 1$ ir $f(x) = 1$.

5. Nesunku atspėti, kad $f(x) = x^2$ yra lygties sprendinys. Iš čia kyla idėja įsivesti keitinį $f(x) = g(x^2)$, visiems $x \geqslant 0$. Gausime $g((x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2) = g((x^2 - y^2)^2) + g((2xy)^2)$. Kita vertus, jei pažymėsime $a = x^2 - y^2$ ir $b = 2xy$, tai nesunku įsitikinti, kad lygčių sistema
$$\begin{cases} a & = x^2 - y^2 \\ b & = 2xy \end{cases}$$
visados turės sprendinių, kad ir kokius a ir b pasirinktume (tiesiog išsireikštume iš antros lygties x, įstatytume į pirmą ir gautume kvadratinę lygtį y^2 atžvilgiu, kurios diskriminantas tikrai teigiamas). Tada gautą funkcinę lygtį galime pasikeisti į $g(a^2 + b^2) = g(a^2) + g(b^2)$, arba į $g(z + t) = g(z) + g(t)$, kur z ir t bet kokie neneigiami realieji. Kadangi turime $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, funkcija g bus aprėžta iš apačios ir galime teigti, kad $g(x) = kx$ visiems neneigiamiems x (nors funkcija Cauchy lygtį tenkina tik neneigiamiems skaičiams, nesunku įsitikinti, kad aprėžtumo vistiek užteks). Tada $f(x) = kx^2$ visiems teigiamiems x, bet pradinėje lygtyje paėmę $y = 0$, gausim $f(0) = 0$, o tada vėl pradinėje lygtyje paėmę $x = 0$ gautume $f(y) = f(-y)$ visiems y, taigi $f(x) = kx^2$ ir neigiamiems x.

6. Nesunku įsitikinti, kad funkcija bijektyvi. Įstačius $x = 0$, $y = x^n$, gausime: $f(f(x^n)) = x^n + f(0)^n$. Iš bijektyvumo aišku, kad egzistuoja toks t, kad $f(t) = 0$ ir z, kad $f(z) = t$. Tada įsistatę pradinėje lygtyje $y = t$ gausime: $f(x^n) = f(x)^n + t$. Panaudoję tai ankščiau gautoje lygtyje gauname $f(f(x)^n + t) = x^n + f(0)^n$. Dabar pradinėje lygtyje pakeitę x į $f(x)$ ir y į z, gausime, kad $f(f(x)^n + t) = f(f(x))^n + z$ ir, sulyginę tai su prieš tai gauta lygtimi, gausime $f(f(x))^n + z = x^n + f(0)^n$. Galiausiai pagrindinėje lygtyje paėmę $x = 0$ ir $y = x$, gausime $f(f(x)) = x + f(0)^n$. Šią $f(f(x))$ išraišką įstatę į prieš tai gautą lygtį gauname: $(x + f(0)^n)^n + z =$

$x^n + f(0)^n$ visiems x, iš kur lengvai gauname $f(0) = t = z = 0$. Tai įstatę į prieš tai turėtas lygtis gausime $f(f(x)) = x$ ir $f(x^n) = f(x)^n$. Tada pradinėje lygtyje pakeitę y į $f(y)$ turėsime $f(x^n + y) = f(x^n) + f(y)$, kas jau labai panašu į Cauchy funkcinę lygtį. Lyginiams n $f(x + y) = f(x) + f(y)$, kur x teigiamas, o y - betkoks. Tada paėmę $y = -x$ gauname, kad $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \geqslant 0$ ir taip $f(x + y) = f(x) + f(y)$ bet kokiems realiesiems x, y. Tačiau ankščiau turėjome $f(x^n) = f(x)^n$, taigi $f(x) \geqslant 0$ visiems $x \geqslant 0$ ir funkcija yra aprėžta intervale, vadinasi, - pavidalo kx. Patikrinę pradinėje lygtyje gauname, kad tiks tik $k = 1$, taigi kai n - lyginis gauname sprendinį $f(x) = x$.

Kai n - nelyginis, tai iškart gauname, kad $f(x + y) = f(x) + f(y)$ bet kokiems realiesiems x, y. Be to, turėjome, kad $f(x^n) = f(x)^n$, tada $f(1) = f(1)^n$ ir $f(1) = 1, -1$ (0 netiks, nes f - injektyvi). Tada gauname du atvejus: $f(p) = p$ arba $-p$ $\forall p \in \mathbb{Z}$ ir abiem atvejais galios $f(px) = pf(x)$. Pažymėkime $b_k = f(x^k)$, $k = 2, 3, ..., n$ ir $q = f(x)$. Iš ankščiau gauto rezultato galios $f((x + p)^n) = (f(x + p))^n = (f(x) + f(p))^n$. Čia galime statyti bet kokį sveiką p ir tai yra tiesinė lygtis bet kurio b_k atžvilgiu. Tada keisdami įvairias p reikšmes galime gauti $n - 1$ neekvivalenčių lygčių su $n - 1$ kintamųjų b_k. Tada aišku, kad tokia tiesinių lygčių sistema turės daugiausiai tik vieną sprendinį. Nesunku patikrinti, kad pirmam atvejui tiks sprendinys $b_k = q^k$, o antram $b_k = -q^k$, lyginiams k ir $b_k = q^k$ nelyginiams k. Tada pirmu atveju gausime $f(x^2) = f(x)^2$, o antru $f(x^2) = -f(x)^2$. Iš čia funkcija ir vėl aprėžta ir gausime, kad kai n - nelyginis, tiks tik tiesiniai sprendiniai $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$.

7. Įstatę duotojoje lygtyje $x = 0$, gausime $f(0) \neq 0$, nes kitaip $f(y) = 0$ visiems y, bet f - nekonstanta. Taigi $g(y) = 1 - \frac{f(y)}{f(0)}$. Įstatę pradinėję lygtyje $x = y = 1$ ir panaudoję a), gausime $f(1) = 0$ ir tada galime pažymėti $f(0) = -k$, kur k - kažkoks teigiamas skaičius. Tada įstatę g išraišką į pradinę lygtį gausime $f(xy) = f(x) + f(y) + \frac{f(x)f(y)}{k}$, arba: $k + f(xy) = (\sqrt{k} + \frac{f(x)}{\sqrt{k}})(\sqrt{k} + \frac{f(y)}{\sqrt{k}})$. Pakeitę $h(x) = \sqrt{k} + \frac{f(x)}{\sqrt{k}}$, gausime $\sqrt{k}h(xy) = h(x)h(y)$, o tada pakeitę $h(x) = \sqrt{k}i(x)$: $i(xy) = i(x)i(y)$. Monotoniškumas niekur nedingo ir šią lygtį jau esamę sprendę, tad nesunku gauti atsakymą:

$$f(x) = -k + k \cdot sgn(x) \cdot |x|^a \text{ ir } g(y) = sgn(y) \cdot |y|^a,$$

kur $sgn(x)$ - x ženklo funkcija.

8. Įstatę į pradinę lygtį $x = y = 0$, gausime, kad $f(0) = 0$ (jei $u(0) = 0$, f - konstanta). f - griežtai monotoninė, taigi 0 ji neįgys su jokia kita argumento reikšme. Iš pradinės lygties $u(y)f(x) + f(y) = f(x + y) = u(x)f(y) + f(x)$. Čia fiksavę y, gausime: $u(x) = \frac{u(y)-1}{f(y)}f(x) + 1 = Af(x) + 1$. Jei $u(z) = 1$, visiems realiesiems z, tai egzistuos $f(x) = x$, tenkinanti pradines sąlygas. Kitu atveju: $f(x + y) = Af(x)f(y) + f(x) + f(y)$. Tada pakeitę $h(x) = Af(x) + 1$ gausime

$$h(x + y) = h(x)h(y).$$

Tai viena iš Cauchy tipo lygčių, kurias sutikome ankščiau. Kadangi f monotoninė, h irgi monotoninė ir $h(x) = b^x$, kur $b > 0$. Tada $f(x) = A^{-1}(b^x - 1)$ ir $u(y) = b^y$

bus sprendiniai. Viską apibendrinus, $u(x) = b^x$, kur $b > 0$ (įskaitant ir $b = 1$), bus vienintelės sąlygas tenkinančios funkcijos.

9. Pirmiausiai darykime keitinį $f(x) = g(x)|1 + x|$. Pradinė lygtis taps: $g(\frac{x+y}{1+xy}) = g(x)g(y)$. Pastebėkime, kad reiškinys $\frac{x+y}{1+xy}$ primena tangentų sumos formulę, tačiau tangentas nepaprastas, o - hiperbolinis. Hiperbolinis tangentas - tai funkcija $\tanh(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Nesunku įsitikinti, kad irgi galios panaši į tangentų sumos formulė, t.y. $\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$. Taigi keičiame lygtyje $x = \tanh(x)$, $y = \tanh(y)$. Gausime $g(\tanh(x + y)) = g(\tanh(x))g(\tanh(y))$. Įsiveskime keitinį $h(x) = g(\tanh(x))$. Gausime lygtį $h(x+y) = h(x)h(y)$. Galime nesunkiai įsitikinti, kad tolydumas niekur nedingo, tai viena iš Cauchy tipo lygčių, kurios sprendiniai bus $h(x) = a^x$, kur $a \geqslant 0$. Tada $a^x = g(\tanh(x)) \implies g(x) = a^{\operatorname{arctanh}(x)}$, $f(x) = a^{\operatorname{arctanh}(x)}|1 + x|$.

Kombinatorika

Matematiniai žaidimai

1. Vienu ėjimu galime sumažinti tik vieną iš parametrų (ilgį arba plotį). Nagrinėdami paprastesnius atvejus pastebime, kad atvejais 0×0, 1×1 ir 2×2 laimi B. Natūralu galvoti, kad atveju $n \times n$ visada laimės B. A atlieka ėjimą su kvadratu ir B gauna ne kvadratinę plytelę iš kurios visada gali padaryti kvadratą ir taip išsaugoti savo laiminčiąją poziciją. Atveju $m = n$ laimi B, kitais atvejais laimi A.

2. Purpurinūsiui tereikia dėti žirgą į langelį, kuris yra simetriškas Žaliaūsio užimtam lentos horizantaliosios (arba vertikaliosios) ašies atžvilgiu.

3. Pirmu ėjimu A prideda 1 ir gauna $n = 3$. Dabar A visada galės paeiti taip, kad B gautų nelyginį skaičių, o po šio ėjimo A atitektų lyginis. B galės pridėti nedaugiau negu vieną trečiąją turimo skaičiaus, o A visada galės pridėti bent pusę. Taigi A ramiai stebi priešininko agoniją tol, kol gauna $n \geqslant 1328$. Jis, pridėdamas pusę šio skaičiaus, pasieks skaičių nemažesnį už 1990

4. 1) Lentą galima padalinti į stačiakampius 2×1. A tereikia pereiti į gretimą to pačio stačiakampio langelį. B tada turės pereiti į kitą stačiakampį ir A visada galės atlikti dar vieną ėjimą.

   2) Lentą galima padalinti į stačiakampius 2×1 neįtraukiant apatinio kairiojo kampo. Tada analogiškai žaisdamas laimi B.

   3) Čia B jau bejėgis. Lyginiams n strategija analogiška (1). Kitu atveju lentą padaliname į stačiakampius 2×1, bet neįtraukiame apatinio kairiojo kampo. Lentą nuspalviname įprastiniu būdu. Pastebime, kad apatinis kairys langelis B yra nepasiekiamas, tad A laimi pajudėdamas į gretimą stačiakampio langelį.

5. Suskirstome lentą į stačiakampius 2×4. Pastebime, kad iš bet kurio stačiakampio langelio žirgo ėjimu galime patekti tik į vieną to stačiakampio langelį. A

padeda žirgą į vieną iš stačiakampių, B tereikia paeiti į langelį esantį tame pačiame stačiakampyje. Kitu ėjimu A būtinai turės pereiti į kitą stačiakampį, taip sudarydamas galimybę B judėti to stačiakampio viduje. Žaidimą visada laimės B.

6. Jei nors vienoje iš krūvelių yra nelyginis akmenukų skaičius, laimi A. Jam tereikia pirmu ėjimu akmenukų skaičius paversti lyginiais abejose krūvelėse. Tada po B ėjimo nors vienoje krūvelėje tikrai bus nelyginis akmenukų skaičius ir A galės tęsti savo spektaklį. Kitu atveju analogiškai žaisdamas laimės B. ∧

7. 1) A tereikia atlaužti kvadratą $m-1 \times m-1$ ir tada laužti simetriškai įstrižainei. ∧
2) A tereikia visada laužti kampinį langelį.
3) Laiminti CHOMP žaidimo strategija nėra žinoma bendru atveju, tai atvira problema. Jei manote, kad uždavinį išsprendėte, tai dar kartelį peržvelkite savo sprendimą :]

8. A renkasi pusiaukraštinių susikirtimo tašką, o B brėžia per jį tiesę, lygiagrečią vienai kraštinių, ir gauna $\frac{5}{9}$ pyrago. Brėždamas kitą tiesę per X jis gautų mažiau, o jei X nebūtų šis taškas, tai B tikrai galėtų gauti daugiau (įrodykite tai geometriškai). ∧

9. A pirmu ėjimu rašo -1 prie x. B rašo a, o A atsako $-a$. $x^3 - ax^2 - 1x + a = 0$ turi šaknis -1, 1 ir a. Tai sveikieji skaičiai. ∧

10. Įrodysime, kad visiems $N > 1$, antrasis žaidėjas laimi tada ir tik tada, jei $N = 2^m$. Tokiu atveju pirmasis žaidėjas paima $2^a(2b+1)$ akmenukų, kur $a \geqslant 0$ ir $b \geqslant 0$. Tada antrasis žaidėjas paima 2^a, o kitais ėjimais kopijuoja pirmojo žaidėjo veiksmus (įsitikinkite, kad tai garantuoja pergalę). Jei $N = 2^a(2b+1)$, kur $a \geqslant 0$ ir $b \geqslant 1$ tada laimi pirmasis žaidėjas pirmu ėjimu paimdamas 2^a akmenukų ir kitais ėjimais kopijuodamas antrojo žaidėjo veiksmus. ∧

11. Kryžiukams-nuliukams. Įsitikinkite tuo! ∧

12. Prisiminkite NIM :] ∧

13. Tokius uždavinius jau mokame spręsti bendru atveju. Akmenukų skaičiams 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 atitinkamai priskiriame NIM vertes lygias 0, 1, 0 , 1, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 1. Atlikdami šią procedūrą didesniems skaičiams pastebime, kad NIM vertės kinta periodiškai, periodo ilgis 11. Nulines vertes turi visi akmenukų skaičiai, kurių forma yra $11n$, $11n+2$, $11n+4$ arba $11n+6$, kur n sveikasis neneigiamas. Jei Matemagikas pradeda pozicijoje, kurios vertė nėra (0), tai jis visada gali pereiti į poziciją (0), o priešininkas negalės pereiti iš (0) į (0). Matemagikas laimės. Jei jis pradeda pozicijoje (0), analogiškai žaisdamas laimi B. ∧

14. Žaidimo pabaigos pozicija yra 1 akmenukas. Akmenukų skaičiams 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 priskiriame NIM vertes lygias 0, 1, 0, 2, 1, 3, 0. Priskyrus vertes didesniems skaičiams nesunku pastebėti ir įrodyti, kad nulines vertes turės skaičiai, kurių forma $2^k - 1$, kur k sveikasis neneigiamas. Taigi jei $n = 2^k - 1$, tada laimi B, kitais atvejais pergalę švenčia A. ∧

15. 1994 vektorių suma yra $\vec{a}$. Pirmasis žaidėjas žaidžia tokioje kordinačių sistemoje, kur x ašis sutampa su $\vec{a}$ kryptimi. Jei $\vec{a} = 0$, tada kryptis gali būti bet kokia. Kiekvienu ėjimu žaidėjas renkasi vektorių, kurio projekcija į x ašį didžiausia. Galų gale pirmojo žaidėjo vektoriaus projekcija į x ašį bus nemažesnė už antrojo, o abiejų žaidėju vektorių projekcijos į y ašį bus lygios (jų suma lygi nuliui) Taigi pirmasis žaidėjas niekada nepralaimės. ∧

16. (Sprendimas Nr. 1) Imame dvi viršutines eilutes ir sunumeruojame langelius iš kairės į dešinę. Brėžiame rodyklę iš apatinio trečio langelio į viršutinį pirmą, iš apatinio 5 į viršutinį 3 ir t.t. Imame dvi žemensnes eilutes ir brėžiame rodykles iš viršutinio antro langelio į apatinį ketvirtą, iš viršutinio ketvirto į apatinį 6 ir t.t. Dar dvi žemesnes eilutes pažymime kaip pirmas dvi ir t.t. Matome, kad rodyklė atitinka horizontalų žirgo ėjimą, o vertikaliu žirgo ėjimu iš rodyklės smaigalio visada atsiduriama rodyklės pradžioje. Žaidėjui A tereikia žirgą pastatyti rodyklės pradžioje ir paeiti į smaigalį. Tada B būtinai paeis į kitos rodyklės pradžią ir A galės paeiti į rodyklės smaigalį. ∧

    (Sprendimas Nr. 2) Susižymėkime lentelės langelius kaip kordinates (x, y), kur x, y yra teigiami sveikieji. Tarkime, kad žirgo pastatymas $(1, 1)$ langelyje ir paėjimas į langelį $(3, 2)$ įstumia A į pralaiminčią poziciją (kitu atveju įrodymas jau yra baigtas). Tada B savo ėjimu peina į langelį (X, Y) taip, kad A vėl atsidurtų pralaiminčioje pozicijoje. Pastebime, kad jei A pirmu ėjimu pastato žirgą į $(2, 3)$, tada ėjimas į (Y, X) garantuoja A pergalę. Dabartinė situacija nuo pirmosios skiriasi tik tuo, kad žirgas nepabuvojo langelyje $(1, 1)$. Tačiau šis langelis yra nepasiekiamas B, tad tai nedaro įtakos baigčiai.

17. Atveju $N = 2$ antrajam žaidėjui pakanka nuspalvinti tašką simetrišką raudonajam centro atžvilgiu. Kad ir kokį didelį lanką atsiriektų pirmasis žaidėjas antrojo ėjimo metu, antrasis visada galės atriekti didesnį (taškų ant pasirinkto apskritimo lanko yra be galo daug). Nagrinėdami atvejį $N = 3$ vėl bandome spalvinti taškus simetriškai centro atžvilgiu, bet pastebime, kad tai nieko gero neduoda. Galimų strategijų skaičius nėra jau toks didelis ir įgudusi akis greit pastebės, kad atveju $N = 2$ pasiteisino strategija spalvinti taisyklingojo dvikampio viršūnes. Tai praktiškai ir yra visas uždavinio sprendimas. ∧

    Antrasis žaidėjas tol spalvina taisyklingojo N-kampio, kurio viršūnė yra pirmasis raudonas taškas, viršūnes, kol gali. Jis nuspalvina a viršūnių. N-kampis yra suskirstytas bent į N lankų, vadinsime šiuos lankus pagrindiniais. Yra nedaugiau negu $N - a - 1$ pagrindinių lankų, kurių abu galai yra raudoni ir pirmasis žaidėjas gali visuose juose nuspalvinti po tašką ir jam dar lieka vienas ėjimas. Jei jam lieka daugiau ėjimų, tai jis spalvina taškus lankuose, kurių abu galai raudoni, kol lieka vienintelis. Taip ilgiausias antrojo žaidėjo lankas bus tikrai trumpesnis už pagrindinį. Kada visos N-kampio viršūnės nuspalvinamos, yra bent $a + 1$ lankų, kurių nors vienas galas yra mėlynas; vadinsime šiuos lankus melsvais. Pirmasis žaidėjas jau atliko bent $N - a$ ėjimų (nuspalvino $N - a$ taisyklingojo N-kampio viršūnių), tad jam liko ne daugiau a ėjimų ir jis negali sudarkyti visų melsvų lankų. Prieš paskutinį ėjimą tikrai nėra nė vieno pagrindinio lanko, kurio abu galai raudoni ir yra nors vienas melsvas lankas. Antrasis žaidėjas gali užsitikrinti lanką mėlynais galais, kurio ilgis kaip norima artimas pagrindinio lanko ilgiui.

Šis lankas bus tikrai ilgesnis už ilgiausią raudoną lanką. Antrasis žaidėjas turi laiminčiąją strategiją.

18. Tegu a ir b yra A ir B skaičiai, o $x < y$ - teisėjo skaičiai. Tarkime, kad žaidimas begalinis. A žino, kad $y \geqslant b \geqslant 0$ ir sako „ne". Kitu žingsniu B suvokia, kad A suprato, jog $y \geqslant b \geqslant 0$, tačiau, jei $a > x$, tada A žinotų, kad $a+b = y$ ir pasakytų „taip", taigi B supranta, kad $x \geqslant a \geqslant 0$ ir žaidimas tęsiasi.

    Tarkime, kad n-tuoju žingsniu A žino, jog B suvokė, kad $s_{n-1} \geqslant a \geqslant r_{n-1}$. Jei $b > x - r_{n-1}$, B žinotų, kad $a + b > x$, t.y. $a + b = y$. Jei $b < y - s_{n-1}$, B žinotų, kad $a + b < y$, t.y. $a + b = x$. Abiem atvejais B galėtų aptspėti A, bet jis pasako „ne", taigi $x - r_{n-1} \geqslant b \geqslant y - s_{n-1}$. Dabar $r_n = y - s_{n-1}$ ir $s_n = x - r_{n-1}$. Kitu žingsniu B analogiškai suvokia, kad $r_{n+1} = y - s_n$ ir $s_{n+1} = x - r_n$. Pastebime, jog abiem atvejais $s_{i+1} - r_{i+1} = s_i - r_i - (y - x)$. Kadangi $y - x > 0$, tai egzistuoja m, kuriam galioja $s_m - r_m < 0$. Prieštara.

19. Taip gali. $P(x)$ yra daugianaris žaidimo pabaigoje. Prieš paskutinį B ėjimą turime daugianarį $F(x)$. Žaidėjas B gali užsitikrinti, kad A paskutiniu ėjimu keis tritaškį prie nelyginio laipsnio. Tada $P(x) = F(x) + ax^m + bx^{2p+1}$. $P(-2) = F(-2) + a(-2)^m - b2^{2p+1}$, $cP(1) = cF(1) + ca + cb$. Jei $c = 2^{2p+1}$, gauname $2^{2p+1}P(1) + P(-2) = 2^{2p+1}F(1) + F(-2) + 2^{2p+1}a + a(-2)^m$. Jei $2^{2p+1}P(1) + P(-2) = 0$, tai $P(x)$ tikrai turės realią šaknį tarp 1 ir -2. $2^{2p+1}F(1) + F(-2) + 2^{2p+1}a + a(-2)^m = 0$, tada $a = \frac{-cF(1)-f(-2)}{c+(-2)^m}$. Paskutiniu ėjimu B tereikia parašyti a taip, kad A reiktų rašyti koeficientą prie nelyginio laipsnio. Tada $P(x)$ turės šaknį tarp 1 ir -2.

20. Kai $k = 1$, žaidėjui A tereikia nuspalvinti tris taškus esančius vienoje tiesėje lygiagrečioje ašims taip, kad vienas gulėtų lygiai per vidurį tarp kitų dviejų, nutolęs nuo jų atstumu X ir, trys taškai, nutolę nuo pirmųjų trijų atstumu X vertikaliai į viršų arbą į apačią, būtų laisvi. Pabandžius nesunku įsitikinti, kad tai įmanoma ir tai pasiekus A lengvai gali laimėti.

    Bandydami atvejį $k = 2$ pastebime, kad plokštumos begalinumas sprendžiant šį uždavinį yra kertinis faktorius. Kuo daugiau A nuspalvina taškų, tuo daugiau galimų kvadratų turi užblokuoti B. Čia ir atsiranda nuojauta, kad pirmasis žaidėjas gali laimėti su bet kokiu k.

    Įrodinėdami uždavinį pasinaudosime keletu paprastų faktų:

    (1) A gali nuspalvinti kaip nori daug taškų vienoje tiesėje, nes taškų skaičius begalinis.
    (2) A visada suras tuščią tiesę lygiagrečią ašims, kurioje nėra nuspalvintas dar nė vienas taškas, nes tiesių skaičius begalinis.

    Pirmasis žaidėjas nuspalvina Z taškų x ašyje ir brėžia per kiekvieną tašką tiesę lygiagrečią ašiai y (vadinsime šias tieses statiniais). Tada susiranda tuščią tiesę lygiagrečią x ašiai ir spalvina šios tiesės sankirtas su statinėmis. A naujojoje tiesėje nuspalvins ne mažiau negu $\frac{N}{Z+1}$ sankirtų. Kitu žingsniu A nutrina visus statinius, kurių sankirtų šioje tiesėje nenuspalvino. A tęsia žaidimą išsirinkdamas tuščią tiesę, nuspalvindamas sankirtas ir nutrindamas nepanaudotus statinius. Pastebime, kad statiniai su pasirinktomis tiesėmis sudaro stačiakampę gardelę, kurios visos sankirtos nuspalvintos raudonai. Pasirinkdamas pakankamai didelį Z, A gali gauti tokią gardelę $a \times b$, kokios tik užsigeidžia.

Nuspalvinęs pakankamai didelę gardelę (pakankamumo sąlygos radimą paliksime skaitytojui), žaidėjas A spalvina x ašyje tašką Q ir brėžia per jį tiesę d sudarančią $45\,^\circ$ kampą su x ašimi taip, kad visi nuspalvintieji taškai gulėtų kairiau šios tiesės.

Prasitęsiame a gardelės horizontalių tiesių ir spalviname šių tiesių sankirtas su d. A galės nuspalvinti bent $\frac{a}{k+1}$ sankirtų (1). Po šių $\frac{a}{k+1}$ ėjimų liks bent $b - a$ nenuspalvintų sankirtų tarp b pratęstų gardelės vertikalių ir tiesės d, A gali nuspalvinti bent jau $\frac{b-a}{k+1}$ šių sankirtų (2).

Dabar nagrinėsime $r = \frac{a}{k+1}$ horizontalių tiesių, kurios kerta d raudonuose taškuose (1) ir $s = \frac{b-a}{k+1}$ vertikalių tiesių, kurios kerta d raudonuose taškuose (2). Pastebime, kad bet kuriems 2 raudoniems taškams iš (1) ir (2) gardelėje atsiras jau nuspalvintas raudonai taškas, kuris su jais sudaro tris kvadrato, kurio kraštinės lygiagrečios ašims, viršūnes. A gali pasirinkti $r \times s$ skirtingų kvadratų, kurių tris viršūnes jau yra nuspalvinęs. Jam lieka nuspalvinti vieną iš $r \times s$ taškų dešiniau linijos d ir taip laimėti žaidimą. Parodysime, kad jis visada galės tai padaryti.

Nuo d linijos nubrėžimo B nuspalvino nedaugiau nei b taškų iš nagrinėjamų $r \times s$. Taigi A tereikia pasirinkti tokius a ir b, kad $a - b$ bei b būtų pakankamai dideli, $r \times s$ $r \times s > b$. (r, s išreikškiamii per a, b, k ir nesunku apskaičiuoti kiek b turi būti didesnis už a). Kadangi žaidimo pradžioje A gali spalvinti tiek taškų, kiek tik širdis geidžia, tad tikrai galės pasirinkti pakankamus a ir b. Patariame skaitytojui pačiam išsiaiškinti, kokie gi a ir b yra pakankami.

Uždavinys gracingai neigia nusistovėjusias normas. Vienas begaliniame lauke - puikiausiais karys.

Literatūra

Bendra

- http://www.mathlinks.ro (olimpiadinės matematikos forumas)
- http://www.math.ca/crux/ (olimpiadinės matematikos žurnalas)
- http://www.math.ust.hk/excalibur/ (olimpiadinės matematikos žurnalas)
- Arthur Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer, 1998.
- Paul Zeitz, *Art and Craft of Problem Solving*, Wiley, 2007.
- D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N.Petrovic, *The IMO Compendium*, Springer, 2006.

Skaičių teorija

- http://www.mathlinks.ro/index.php?f=456 (Problems in Elementary Number theory (PEN))
- T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, *104 Number Theory Problems*, Birkhauser, 2007.
- T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations*, GIL, 2002.
- K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer, 1990.

Algebra

- Pham Kim Hung, *Secrets in Inequalities (Volume 1)*, GIL Publishing House, 2007.
- Samin Riasat, *Basics of Olympiad Inequalities*, 2008.
- Ivan Matic, *Classical Inequalities*, The IMO Compendium Group, 2007.
- Hojoo Lee, *Topics in Inequalities - Theorems and Techniques*, 2007.
- Tran Phuong, *Diamonds in Mathematical Inequalities*, Hanoi Publishing House, 2007.
- Thomas J. Mildorf, *Olympiad Inequalities*, 2006. (http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/MildorfInequalities.pdf)
- T. Andreescu, V. Cartoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2003.
- J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge University Press, 2004.

Kombinatorika

- Ted Alper, *Two Player Games in Olympiads and Real Life*, Berkeley Math Circle, 2000.